Sborník
Jednoty Českých Mathematiků v Praze.
Číslo II.

HYDRODYNAMIKA.

Sepsal

DR. FR. KOLÁČEK.



V PRAZE 1899.
Nákladem Jednoty Českých Mathematiků.

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE.

Číslo II.

FR. KOLÁČKA

HYDRODYNAMIKA.





V PRAZE.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

HYDRODYNAMIKA.

Sepsal

Dr. FR. KOLÁČEK,
professor theoretické fysiky na české universitě.





V PRAZE 1899.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Předmluva.

Novější hydrodynamika jest po mathematické stránce nejkrásnější, ale zároveň nejnesnadnější partií theoretické fysiky: mnohdy kryje se spůsob mathematického uvažování přímo s oním funkční theorie a může tuto illustrovati. Těsná formálná souvislost hydrodynamických a elektromagnetických problémů činí ji i s fysikálního stanoviska zajímavou vzdor tomu, že dle nynějších oprávněných představ vektor magnetického pole, jemuž v zmíněné analogii rychlost proudu tekutiny odpovídá, není jako tento povahy lineárné, nýbrž axiálné.

Rozvoj hydrodynamiky pojí se ke jménům: *Lagrange*, *Green*, *Helmholtz*, *W. Thomson* (lord *Kelvin*), *Stokes* a *Kirchhoff*. K originálním pojednáním těchto badatelů zejména k spisům *Thomsonovým*, *Kirchhoffovým* a *Helmholtzovým* dlužno čtenáře v prvé řadě poukázati.

Souborných spisů o hydrodynamice jest málo; z anglických jmenujeme knihu *Lambovu*, pak obsahem bohatou ale příliš stručnou hydrodynamiku *Bassetovu*, ze spisů německých stojí v čele mechanika *Kirchhoffova*, neobsahuje však ničeho o později objevených vlastnostech cyklického pohybu potenciálového. V tom ohledu hleděl jsem našim studujícím

býti nápomocen jednak jak myslím snadněji pochopitelným spracováním látky samé, jednak i jistou úplností obsahu. Na některých místech naskytla se příležitost k řešení problémů nových; jmenuji zde odvození rovnic pro oscillace libovolně zakřivených ploch pod vlivem kapillarity, některé problémy o vlnách, přímou dedukci pohybových rovnic pro tělesa v tekutině obsažená v případě cyklosy atd.

Obrazců jest málo a musí si čtenář mnohý sám doplniti; položil jsem je z dobrého důvodu místo do textu na konec knihy a připomínám, že nejsou uspořádány dle číslic po sobě běžících, nýbrž dle pohodlí čtenářova. Celý spis musil dříve vyjíti nežli jsem si sám přál; odtud pocházejí některé nedostatky, kterým jsem na konci knihy dle možnosti odpomoci hleděl.

V SLAVKOVĚ n. M. dne 18. července 1899.

Obsah.

Kapitola V.

Kapitola VI.

Kapitola VII.

Kapitola VIII.

Kapitola IX.

Kapitola X.

Kapitola I.

§ 1. ***Úvod.*** Se stanoviska hydrodynamiky dělíme tekutiny ať kapalné jako voda ať plynovité jako vzduch na dokonalé a nedokonalé. Dělidlem jest tu povaha vniterných tlaků, kterýmiž na sebe účinkují dvě sousedící částice v ploše jim společné. Tekutiny považujeme při tom za kontinua, abstrahujíce od jejich eventuálného molekulárného složení.

Tělesa, při kterých tlak i v stavu rovnovážném jest šikmý k ploše tlačené, nepovažujeme za tekutiny, nýbrž za látky pevně pružné.. Tekutinami se zovou hmoty, jejichž částice ve stavu rovnovážném na sebe účinkují za všech okolností jen tlaky normálními. Stává-li se tak i při libovolném pohybu částic jejich, nazýváme je dokonalými, jinak nedokonalými.

Tekutiny dokonalé existují právě tak jako na př. absolutně „*tuhá tělesa*“ jen v abstrakci. Tekutiny skutečné jsou více méně nedokonalé Tato vlastnost jejich, zvaná viskosita, vazkost, přichází někdy ve značné míře k platnosti, na př. při proudění skrz úzké otvory; za jiných okolností chovají se tytéž tekutiny téměř jako dokonalé. Poučným jest v tomto ohledu jistý *Kirchhoffem* studovaný druh stojatých vln vodních, kde theoretické vývody vycházející ze supposice tekutiny dokonalé souhlasí s měřením až na malé zlomky procenta (Kirchhoff. Abh. p. 442, Wied. Ann. 10. sv.).

Jiným dělidlem tekutin jest větší neb menší míra stlačitelnosti jejich. Tekutiny absolutně nestlačitelné, které tvoří

hlavní objekt hydrodynamiky, existují opět jen „ex definitione“. Nejvíce blíží se jim tak zvané *kapaliny*, když se nejedná právě o zjevy na stlačitelnosti jejich založené. Jak daleko zde jíti dovoleno, ukazuje následující úvaha.

Mysleme si absolutně nestlačitelnou kapalinu obsaženou v uzavřené nádobě se stěnami tuhými, na př. ve válci s dvěma pohyblivými písty. Sebe menší posunutí pístu prvého A má v zápětí *okamžitý* pohyb druhého. V skutečnosti jest tomu jinak. Tlak vznikne u A a šíří se na př. ve vodě následkem stlačitelnosti s rychlostí asi 1400 m za sec., dosáhne bod ve vzdálenosti jednoho metru za 1/1400 sec., jiný, vzdálený o 1400 m, teprva za sekundu. Lze tedy jen tolik říci, že supponovaná nestlačitelnost tekutiny nepadá na váhu při poměrně malých rozměrech prostoru jí vyplněného; při větších třeba na ni bráti ohled.

§ 2. *Výslednice sil tlakových u tekutin dokonalých.* Tlak p, vždy vztažený k jednotce plochy, jest spojitou, jednoznačnou a konečnou funkcí posice, t. j. souřadnice x, y, z a času t; sám o sobě směru nemá, rozhoduje o tom poloha tlačené plochy. Malý pravoúhlý hranol o stranách a, b, c rovnoběžných s osami, v posici x, y, z, podléhá s levé*) strany tlakové síle $p \, . \, bc$, s pravé strany $p' \, . \, bc$, ve směru rostoucího x tudíž úhrnné síle $-(p' - p)\, bc = -abc\,(p' - p)/a = -abc\,(\partial p / \partial x)$. Podobně ve směru osy y a z tlakům výsledným $-abc\,(\partial p / \partial y)$,. $-abc\,(\partial p / \partial z)$. Hmota hranolku jest při hustotě tekutiny ϱ $abc\,\varrho$; tudíž budou osové složky výsledného urychlení, které tlaky samy o sobě by vzbuditi dovedly, $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$.

Jiná část urychlení pochází od *zevních sil*, jejichžto složky vztažené k jednotce hmoty v bodě x, y, z zoveme X, Y, Z. Síly, jimž hranol podléhá, jsou pak: $abc\varrho\, X$, $abc\varrho\, Y$, $abc\varrho\, Z$, a zrychlení, jež by samy o sobě spůsobily X, Y, Z.

Jde-li na př. o tíži, jest $X = o$, $Y = o$, $Z = -g$, čelí-li osa z vertikálně nahoru.

*) Souřadnicový systém měj osu x na pravo, osu z nahoru a osu y před rovinu nákresnou. Systémy, s nimiž nám nadále jednati bude, mají s ním tu vlastnost společnou, že se otočením o 90° ve směru rafije hodinové kol osy z, potažmo x, potažmo y, dostaneme od osy x-ové ku y-ové, od této k ose z a od osy z k ose x-ové. Jest to obvyklý u nás systém francouzský.

§ 3. ***Všeobecné úvahy o plošných silách.*** U skutečných (nedokonalých) tekutin supponujeme při pohybu mimo tlak ještě existenci dodatečných plošných sil viskosity. Nutno tedy o plošných silách vůbec uvažovati způsobem poněkud všeobecnějším. Podotýkáme při tom, že budeme operovati s nimi jako by byly *napjetím* (tedy *záporným* tlakem).

Uvnitř hmoty v posici x, y, z položený plošný element $d\omega$ jest společnou hranicí dvou na sebe plošnými silami účinkujících partií hmoty I a II. Síla, jíž I podléhá od II v ploše $d\omega$, jest šikmé napjetí, úměrné ploše $d\omega$, o velikosti $S_n d\omega$ a o složkách osových $X_n d\omega$, $Y_n d\omega$, $Z_n d\omega$. Index n značí tu normálu k ploše $d\omega$, vedenou od I ku II. Značí tudíž X_n, Y_n, Z_n osové komponenty napjetí vztaženého k jednotce plochy, jemuž v ploše $d\omega$ podléhá hmota I položená na té straně elementu $d\omega$, *odkud* normála n vychází. Napjetí, kterému II podléhá se strany hmoty I, jest dle principu akce a reakce: $-d\omega\, X_n$, $-d\omega\, Y_n$, $-d\omega\, Z_n$. Poněvadž směr normály jest tu protivný, což označíme indexem ($_{-n}$), bude dle vztahů $d\omega\, X_{-n} = -d\omega\, X_n$, v platnosti: $X_n = -X_{-n}$, $Y_n = -Y_{-n}$, $Z_n = -Z_{-n}$. Dle uvedené definice veličin X_n, Y_n, Z_n bude snadno rozuměti významu podobných veličin: X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z. Jsou to vesměs osové složky napjetí vztaženého k jednotce plochy.

Veliká písmena udávají *směry* složek, indexy směry normály pro element $d\omega$; hmota, na niž napjetí účinkuje, leží pak na oné straně elementu, odkud normála vychází.

Z malého hranolu o hranách abc rovnoběžných s osami souřadnic vychází pravou stěnou bc normála mající směr osy x-ové; účinkují tu síly: $X_x\, bc$, $Y_x\, bc$, $Z_x\, bc$.

Normála z levé stěny bc vycházející má směr $_{-x}$, a síly tu na hranol působící jsou: $bc\, X'_{-x}$, $bc\, Y'_{-x}$, $bc\, Z'_{-x}$, neb $-bc\, X'_x$, $-bc\, Y'_x$, $-bc\, Z'_x$.

Souhrnem obdržíme od obou stěn bc síly (dle tří os):

$$(X_x - X'_x)\, bc,\ (Y_x - Y'_x)\, bc,\ (Z_x - Z'_x)\, bc.$$

Jsou-li, jak předpokládáme, veličiny $X_x \ldots$ konečnými a spojitými úkony posice, budou síly ty rovny:

$$abc\, \frac{\partial X_x}{\partial x},\ abc\, \frac{\partial Y_x}{\partial x},\ abc\, \frac{\partial Z_x}{\partial x}.$$

Podobnou úvahou najdeme síly pocházející od napjetí na ostatních dvojicích stěnových *ab*, *ac*. Souhrnem obdržíme pro osové složky: P, Q, R *všech* na hranol účinkujících napjetí výrazy:

$$
\begin{aligned}
P &= abc\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \\
Q &= abc\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) \\
R &= abc\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Napjetí účinkující na stěnách hranolku dají se též složiti v statické momenty kolem os jdoucích těžištěm jeho. Tak na př. bude až na veličiny vyššího řádu složka momentu, příslušná ose rovnoběžné se z: $M_z = abc\,(Y_x - X_y)$, a podobně

$$M_y = abc\,(X_z - Z_x), \quad M_x = abc\,(Z_y - Y_z)$$

Momenty setrvačnosti kol těchže os těžištných jsou veličiny o řádu $abc\varrho \,.\, s^2$, kdež gyrační radius s jest o řádu nekonečně malých rozměrů hranolových. Nemá-li vzniknouti nekonečně veliké obloukové zrychlení, musí býti

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Z_y = Y_z \tag{2}$$

Položme bodem x, y, z tři nekonečně malé délky a, b, c rovnoběžně osám, tak že vznikne (*Cauchy-ho*) tetraedr, jehož největší plochou jest f. Směrové cosinusy normály ku f, ven z tetraedru čelící, jsou $\cos nx = \frac{bc}{2f}$, $\cos ny = \frac{ac}{2f}$, $\cos nz = \frac{ab}{2f}$. Napjetí účinkující na všech stěnách dají výslednou, jejíž projekce na x-ovou osu jest: $S_x = f X_n - \frac{bc}{2} X_x - \frac{ac}{2} X_y - \frac{ab}{2} X_z$, tedy veličina o řádu ab, kdežto hmota tetraedru jest o řádu $abc\varrho$. Nemá-li vzniknouti zrychlení nekonečně veliké, musí S_x býti nullou. Odtud jde:

$$
\begin{aligned}
X_n &= \cos nx\, X_x + \cos ny\, X_y + \cos nz\, X_z \\
Y_n &= \cos nx\, Y_x + \cos ny\, Y_y + \cos nz\, Y_z \\
Z_n &= \cos nx\, Z_x + \cos ny\, Z_y + \cos nz\, Z_z
\end{aligned} \tag{3}
$$

Pomocí rovnic (2) a (3) lze kterékoli napjetí vyjádřiti *šesti* veličinami X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x a úloha, která zbývá, jest vyjádřiti je pohybovými parametry tekutiny. Řešení této úlohy,

o níž později jednáno bude, povedlo se dosud jen pro velmi zvolné pohyby tekutin. Vyjímajíc poslední kapitolu nedokonalým tekutinám věnovanou, budeme se zabývati výhradně pohybem tekutin dokonalých.

Kapitola II.

§ 4. ***Rovnice pohybové.*** Při studiu pohybu tekutin neb plynů obracíme svůj zřetel buď k dráze *téže* určité nekonečně malé částice hledíce vyšetřiti, jak okamžitá poloha těžiště jejího x, y, z závisí na čase t a veličinách a, b, c, jimiž vůči ostatním individuálnost její vyslovena jest (rovnice *Lagrange-ovy*); aneb snažíme se v každém čase t najíti *prostorové* rozdělení osových složek rychlosti u, v, w, tlaků p, pak i hustoty ϱ a temperatury T, jde-li o tekutiny plynovité (rovnice *Eulerovy*).

a) *Rovnice Lagrange-ovy.*

Za veličiny a, b, c lze na př. voliti souřadnice částice v *jistém* čase $t = o$ a úloha, o kterou jde, jest, nalézti, jak koordinaty *okamžité* posice x, y, z a p, ϱ, T závisí na *nezávisle* proměnných a, b, c, t. Složky okamžitého urychlení jsou $\partial^2 x / \partial t^2$, $\partial^2 y / \partial t^2$, $\partial^2 z / \partial t^2$ a rovnají se dle *Newtona* příslušným složkám *sil urychlujících* jednak původu *zevnějšího* (X, Y, Z), jinak *vnitřního*. *Tyto* jsou spůsobeny silami plošnými, u dokonalých tekutin jen tlaky normálními, a rovnají se dle předchozího: $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$, při čemž $-\frac{\partial p}{\partial x}$ atd. označují *spády* tlaku směrem souřadnicových os a sice v místě x, y, z, kde se částice právě nalézá.

Z funkcionálních vztahů $x = x(a, b, c, t)$, $y = y(a, b, c, t)$, $z = z(a, b, c, t)$ lze a, b, c vyjádřiti jakožto úkony času t a veličin x, y, z, tudíž i vzestupy tlaku:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} \ldots \text{atd.}$$

jakožto úkony proměnných a, b, c, t.

Rovněž platí: $\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{da} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$ s podobnými dvěma rovnicemi, které vzniknou, nahradí-li se a veličinami b, c.

Dosadíme-li do těchto tří rovnic výrazy $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$ vzaté z rovnic pohybových:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z,$$

obdržíme *Lagrange-ovy* rovnice:

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} + X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} + X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} + Z\frac{\partial z}{\partial b} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} + X\frac{\partial x}{\partial c} + Y\frac{\partial y}{\partial c} + Z\frac{\partial z}{\partial c}.
\end{aligned}
$$

Dají-li se síly X, Y, Z derivovati z potenciálu P, závislého na x, y, z, tudíž i na a, b, c, t, bude jednodušeji:

$$X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right) = -\frac{\partial P}{\partial a} \text{ atd.}$$

Za tvar nekonečně malé částice můžeme si bez újmy všeobecné platnosti zvoliti neskonale malý tetraedr, jehož rohy 0, 1, 2, 3, mají v čase t souřadnice příslušné ku (a, b, c), $(a + da, b, c)$, $(a, b + db, c)$, $(a, b, c + dc)$, totiž:

$$
\begin{aligned}
&0 \ldots \quad x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t), \\
&1 \ldots \quad x_1 = x(a + da, b, c, t), \quad y_1 = y(a + da, b, c, t), \\
&\qquad\qquad z_1 = z(a + da, b, c, t), \\
&2 \ldots \quad x_2 = x(a, b + db, c, t) \ldots \\
&3 \ldots \quad x_3 = x(a, b, c + dc, t) \ldots
\end{aligned}
$$

Souřadnice bodů 1, 2, 3 vůči systému parallelnímu, jdoucímu na okamžik rohem 0 (x, y, z), jsou tudíž:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}da, \frac{\partial y}{\partial a}da, \frac{\partial z}{\partial a}da\right), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial b}db, \frac{\partial y}{\partial b}db, \frac{\partial z}{\partial b}db\right),$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial c}dc, \frac{\partial y}{\partial c}dc, \frac{\partial z}{\partial c}dc\right).$$

Šestinásobný objem tetraedru rovná se součinu z $da \,.\, db \,.\, dc$ a z determinantu $\left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} \cdot \frac{\partial z}{\partial c}\right)$; produkt připojením faktoru ϱ vzniklý jest totožný s šestinásobnou (během času nepromělivou) hmotou tetraedru, tedy platí

$$\varrho \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = f(a, b, c) \tag{2}$$

Úkon $f(a, b, c)$ na čase *nezávislý* jest veličinou ***danou***, protože hustotu ϱ a polohu rohů v čase $t = o$ za dané považujeme.

Je-li tlak udán jakožto funkce hustoty ϱ, bude pomocí (2) lze předně ϱ, pak i p vyjádřiti veličinami x, y, z, a, b, c a jejich differenciálními kvocienty a rovnice (1) integrovati.

Jsou-li takto úkony $x(a, b, c, t) \ldots$ nalezeny, lze z (2) najíti ϱ, pak p.

Operace s *Lagrange-ovými* rovnicemi (ostatně v podstatě již od *Eulera* udanými) jsou nesnadné; vyjímajíc jednoduchý příklad budeme se v následujícím výhradně zabývati tak zv. rovnicemi *Eulerovými*.

b) Rovnice Eulerovy.

Souřadnice x, y, z plynulého bodu *prostorového*, v němž se arciť v *jiném* čase *jiná* materiálná částice nalézati bude, tvoří dohromady s časem t systém *čtyř* na sobě *nezávislých* argumentů, jimiž vyjádřiti máme složky rychlosti u, v, w, pak p, ϱ, T, neb vůbec nějakou fysikální vlastnost částice M, v čase t posici x, y, z zaujímající. Je-li σ numerickou hodnotou řečené vlastnosti, jde o úkon $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$. V čase $t + dt$ zaujímá M posici: $x + udt$, $y + vdt$, $z + wdt$, numerická hodnota vlastnosti σ *téže materiálné částice* jest $\sigma' = \sigma(x + udt,\ y + vdt,\ z + wdt,\ t + dt)$; její vzrost v jedničce časové, symbolicky označený $\frac{D\sigma}{Dt}$, bude: $\frac{\sigma' - \sigma}{dt}$, neb jde-li o úkony časově a prostorově spojité

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + u\frac{\partial\sigma}{\partial x} + v\frac{\partial\sigma}{\partial y} + w\frac{\partial\sigma}{\partial z}.$$

Dlužno tu náležitě vytknouti rozdíl mezi $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ a $\frac{D\sigma}{Dt}$.

Prvý výraz udává, jak rychle se σ *v témže místě prostorovém* x, y, z během času mění, kdežto $D\sigma / Dt$ značí relativný časový vzrost pro určitou materiální částici M, která v čase t

zaujímala posici x, y, z, avšak v čase $t + dt$ zaujímá posici jinou.

Je-li na př. ϱ hustotou částice M, jest relativný časový vzrost její pro *tutéž částici*:

$$\frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + u\frac{\partial\varrho}{\partial x} + v\frac{\partial\varrho}{\partial y} + w\frac{\partial\varrho}{\partial z};$$

měla-li v čase t částice M komponentu rychlosti u, bude její relativní vzrost časový čili komponenta *zrychlení* dle osy x-ové:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Rovnost urychlení a urychlující síly vede pak pro dokonalé tekutiny k rovnicím:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y \qquad (3)\\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z\end{aligned}$$

Čtvrtou rovnici odvodíme následovně:

V posici x, y, z mysleme si pravoúhlý hranol čtyrboký s nekonečně malými hranami a, b, c, souběžnými s osami souřadnic jakožto geometrický útvar *v prostoru utkvělý.*

Hmota v něm obsažená jest $abc\varrho$; vzrost její v čase dt, daný výrazem: $abc \,.\, \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, dt$, jest podmíněn přítokem hmoty stěnami. Levou stěnou*) bc vnikne množství hmoty: $bc \,.\, u\varrho \,.\, dt$, pravou unikne: $bc \,.\, u'\varrho' \,.\, dt$, celkem jí tedy přibude o

$$-bcadt\frac{(u'\varrho' - u\varrho)}{a}, \text{ neb } -abcdt\frac{\partial}{\partial x}(u\varrho),$$

jde-li o úkony vesměs spojité. Podobně se to má s ostatními dvojicemi stěn. Máme tudíž

$$(4) \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\varrho) + \frac{\partial}{\partial y}(v\varrho) + \frac{\partial}{\partial z}(w\varrho) = 0 \text{ neb:}$$

---

*) Značí-li ω rovinný plošný element v hranici nějakého prostoru S a U absolutní rychlost toku, vyplňuje hmota v čase dt do S vzniklá šikmý hranol o základně ω a hraně Udt. Obsah jeho jest roven součinu z ω a výšky $Udt \cos\chi$, kdež χ označuje úhel mezi hranou a normálou, a rovná se následkem toho součinu z ω a z normální komponenty rychlosti $U \cos\chi$.

$$\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4^a}$$

Vyjmeme-li zjevy původu akustického, můžeme obyčejné kapaliny ba i mnohdy plyny považovati za prakticky nestlačitelné a rovnici (4^a) nahraditi rovnicí „kontinuity“

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4^b}$$

Jsou-li v tekutině obsaženy pevné stěny, musí v kterémkoli bodu jejich rychlost tekutiny ve směru plošné normály (o cosinusech směru $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$) býti nullou, což vede ku:

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = 0 \tag{5}$$

Tato rovnice platí arciť jen potud, pokud připouštíme nemožnost vnikání tekutiny do stěn neb tvoření se *prázdného* prostoru.

Jsou-li stěny v pohybu a má-li určitý bod jejich rychlost u_1, v_1, w_1, musí z těchže důvodů *relativná* rychlost sousedící tekutiny ve směru normály býti nullou, tedy:

$$(u - u_1) \cos nx + (v - v_1) \cos ny + (w - w_1) \cos nz = 0. \tag{6}$$

O podmínkách, které splněny býti musí na společném rozhraní *dvou* tekutin jakož i na *volném povrchu* tekutiny, bude řeč na příslušném místě.

U tekutin nestlačitelných stačí k určení veličin u, v, w, p rovnice (3) a (4^b).

Je-li u plynů za jistých podmínek tlak hustotou *úplně* určen a sice vztahem $p = f(\varrho)$, na př. zákonem *Boyle-Mariotteovým* při temperatuře stálé neb relací *Poissonovou* při proměnách adiabatických, dostačí k určení *pěti* veličin u, v, w, p, ϱ hořejší vztah a rovnice (3) a (4).

V případě nejvšeobecnějším, kdy všech *šest* veličin u, v, w, p, ϱ, T hledáme, máme jen těchto *pět* rovnic a dlužno nalézti šestou, která jest původu thermodynamického a vyjadřuje, že vzrost temperatury v určitém místě spůsoben jest netoliko vedením a sáláním tepla, nýbrž i částečnou proměnou mechanické práce v teplo.

Význam hydrodynamických rovnic jest velice všeobecný, neboť jsou pouze výrazem jednak základní věty mechaniky jinak principu nezničitelnosti hmoty, nelze tudíž očekávati možnost integrovati rovnice tak všeobecně, že by se pod

nalezené integrály každý speciálný případ subsumovati dal. Obtíže mathematické byly tu počátkem nynějšího století přemoženy jen v jednoduchých problémech, částečně spadajících v obor akustiky. Prvý veliký krok ku předu učinil *Lagrange* objevením věty: dají-li se v případu $p = f(\varrho)$ a $X = -\partial P/\partial x$; $Y = -\partial P/\partial y$, $Z = -\partial P/\partial z$ v *jistém* okamžiku veličiny u, v, w vyjádřiti ve formě

$$u = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

jest možnost toho dána v každém *pozdějším* okamžiku. Touto okolností redukují se hydrodynamické rovnice jak později uvidíme na *dvě*, ale hlavní význam *Lagrange-ova* theoremu teprve *Helmholtzem**) fysikálně interpretovaného jest ten, že tvoří dělidlo problémů hydrodynamických na pohyby *vířivé* a *nevířivé*. Od této doby datuje se veliký pokrok hydrodynamiky, nemálo podporovaný současně se ujímajícími názory *Faraday-ovými* o poli elektrickém a magnetickém.

---

§ 5. ***Deformace částic tekutinových.*** Buďtež u, v, w rychlosti částice M v posici x, y, z a $\frac{\partial u}{\partial x} = a$, $\frac{\partial u}{\partial y} = b$, $\frac{\partial u}{\partial z} = c$, $\frac{\partial v}{\partial x} = a'$, $\frac{\partial v}{\partial y} = b'$, $\frac{\partial v}{\partial z} = c'$, $\frac{\partial w}{\partial x} = a''$, $\frac{\partial w}{\partial y} = b''$, $\frac{\partial w}{\partial z} = c''$ hodnoty differenciálných kvocientů v bodě M, jak předpokládáme konečných. Koordinaty nekonečně blízkého bodu M' buďtež $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ a rychlosti jeho u', v', w'. Pak jest dle věty *Taylorovy*:

$$u' = u + a\xi + b\eta + c\zeta, \quad v' = v + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \quad w' = w + a''\xi + b''\eta + c''\zeta.$$

Považujeme-li bod M za centrum jistého velmi malého kvanta tekutinového, které jest zase skupinou hmotných bodů M'', M''' se souřadnicemi $x + \xi''\ldots$, $x + \xi'''\ldots$, bude pro každý bod $M''\ldots$ platiti rovnice podobná s *týmiž* $ab\ldots$, které zde hrají úlohy konstant, s jinými však ξ, η, ζ.

Výrazy u', v', w' lze psáti ve formě:

$$\begin{aligned} u' &= u + q'\zeta - r'\eta + \frac{\partial f}{\partial \xi} = u + q'\zeta - r'\eta + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ v' &= v + r'\xi - p'\zeta + \frac{\partial f}{\partial \eta} = v + r'\xi - p'\zeta + a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \qquad (7) \\ w' &= w + p'\eta - q'\xi + \frac{\partial f}{\partial \zeta} = w + p'\eta - q'\xi + a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta, \end{aligned}$$

když jest:

$$2f = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta \qquad (8)$$

---

*) *H.*, Wirbelbewegungen, Borchardt J. 55. sv.

Veličiny p', q', r', a_{11}, $a_{12}\ldots$ jsou nové konstanty, které s dřívějšími souvisí pomocí vztahů:

$$
\begin{aligned}
a_{11}&=a=\frac{\partial u}{\partial x}, & a_{12}-r'&=b=\frac{\partial u}{\partial y}, & a_{13}+q'&=c=\frac{\partial u}{\partial z} \\
a_{12}+r'&=a'=\frac{\partial v}{\partial x}, & a_{22}&=b'=\frac{\partial v}{\partial y}, & a_{23}-p'&=c'=\frac{\partial v}{\partial z} \\
a_{13}-q'&=a''=\frac{\partial w}{\partial x}, & a_{23}+p'&=b''=\frac{\partial w}{\partial y}, & a_{33}&=c''=\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Odtud nalézáme:

$$a_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\ a_{22}=\frac{\partial v}{\partial y},\ a_{33}=\frac{\partial w}{\partial z},\ a_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (10)$$

$$a_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ a_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$p'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\ q'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ r'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (11)$$

Rovnice (7) lze interpretovati následovně:

Rychlost každého bodu ve skupině jest trojí. Prvá jest taková, jako kdyby se celá skupina co tuhý celek v před pohybovala s rychlostí centra u, v, w; druhá, jako kdyby se co tuhý celek točila s jistou rychlostí (již vířivou nazýváme), jejíž složky jsou*) p', q', r' kol jisté osy centrem jdoucí. Kdežto se prvýma dvěma pohyby vzájemná konfigurace bodů v skupině nemění, odpovídá třetí pohyb o složkách: $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ homogenní *deformaci* skupiny.

Tyto „deformační“ rychlosti jsou v každém bodě M' lineárnými úkony posice jeho ξ, η, ζ vůči centru skupiny M a mají směr normály k centrické ploše druhého stupně: $2f=a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+\ldots$, která se bodem M' položiti dá. Odtud jde, že existují *tři* na sobě kolmé směry, které vzaty za osy souřadnicové převedou rovnici plochy na tvar

$$2f=A_{11}\xi^2+A_{22}\eta^2+A_{33}\zeta^2,$$

takže říci lze, že každý bod má *tři* dilatační rychlosti k sobě kolmé a k těmto hlavním osám rovnoběžné, jichž obnosy jsou:

---

*) Rotační rychlost čítáme kladně, děje-li se se zřetelem na kladný směr osy ve směru rafiky hodinové. Rotace r' jest na př. kladná od osy x-ové k y-ové kvadrantem $x+$, $y+$.

$A_{11}\xi$, $A_{22}\eta$, $A_{33}\zeta$. Vidíme současně, že v tomto souřadnicovém systému jest pro bod M

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=o,\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=o,\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=o,\ \frac{\partial u}{\partial x}=A_{11},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=A_{22},\ \frac{\partial w}{\partial z}=A_{33}.$$

§ 6. *Důkaz Lagrange-ova theoremu.*

Do výrazu $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$ dosaďme za $\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial z}$ z rovnic (11) $\frac{\partial v}{\partial x}-2r'$, potažmo $2q'+\frac{\partial w}{\partial x}$; tím převedeme prvou *Eulerovu* rovnici (3) na tvar (*Thomsonův*):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(V^2)}{\partial x}+2(wq'-vr')=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+X\\ &\text{kdež za } u^2+v^2+w^2 \text{ položeno jest } V^2.\\ &\text{Druhé dvě rovnice jsou:}\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(V^2)}{\partial y}+2(ur'-wp')=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y\\ &\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(V^2)}{\partial z}+2(vp'-uq')=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Druhou rovnici v (12) differencujme dle z, třetí dle y; odečtením obdržíme na levé straně: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+$

$$2\left[-u\left(\frac{\partial r'}{\partial z}+\frac{\partial q'}{\partial y}\right)+v\frac{\partial p'}{\partial y}+w\frac{\partial p'}{\partial z}+p'\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-q'\frac{\partial u}{\partial y}-r'\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

Z rovnic (11) obdržíme: $\frac{\partial p'}{\partial x}+\frac{\partial q'}{\partial y}+\frac{\partial r'}{\partial z}=0$ (13)

Z rovnice (4ª) jde: $\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}$.

Přejde tudíž strana levá ve výraz:

$$2\left[\frac{\partial p'}{\partial t}+u\frac{\partial p'}{\partial x}+v\frac{\partial p'}{\partial y}+w\frac{\partial p'}{\partial z}-p'\frac{\partial u}{\partial x}-q'\frac{\partial u}{\partial y}-r'\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{p'}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}\right]\text{neb:}$$

$$2\left[\frac{Dp'}{Dt}-\frac{p'}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}-p'\frac{\partial u}{\partial x}-q'\frac{\partial u}{\partial y}-r'\frac{\partial u}{\partial z}\right]\text{ neb:}$$

$$2\varrho\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{p'}{\varrho}\right)-\frac{p'}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{q'}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{r'}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

Úhrnný výsledek naznačených operací jest:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \varrho}{\partial z}\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) =$$

$$2\varrho\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{p'}{\varrho}\right) - \frac{p'}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{q'}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{r'}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

s podobnými dvěma rovnicemi.

Podléhají-li síly potenciálu, bude $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0$; je-li p úkonem jen hustoty, $p = f\,(\varrho)$, bude $\frac{\partial \varrho}{\partial y}\,\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \varrho}{\partial z}\,\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \varrho}{\partial y}\,\frac{\partial \varrho}{\partial z} f'(\varrho) - \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} f'(\varrho) = 0$. Hořejší rovnice přejdou tím v

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\left(\frac{p'}{\varrho}\right) &= \frac{p'}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{q'}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{r'}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{D}{Dt}\left(\frac{q'}{\varrho}\right) &= \frac{p'}{\varrho}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{q'}{\varrho}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{r'}{\varrho}\,\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (14) \\
\frac{D}{Dt}\left(\frac{r'}{\varrho}\right) &= \frac{p'}{\varrho}\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{q'}{\varrho}\,\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{r'}{\varrho}\,\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

Výrazy $\frac{p'}{\varrho}$, $\frac{q'}{\varrho}$, $\frac{r'}{\varrho}$ representují jisté vlastnosti tekuté částice v čase t, vzrost těchto vlastností pro *touž* částici za čas dt jest: $\frac{D}{Dt}\left(\frac{p'}{\varrho}\right) dt$ atd., tedy dle (14) nullou, jestliže v čase t p', q', r' nullou byly; *částice prostá víř̌ivého pohybu v čase t nebude víř̌iti v čase t + dt, a následkem toho ani v čase t + 2dt, tedy nikdy.* Lze to i jinak dokázati.

Násobme rovnice (14) po sobě výrazy $\frac{p'}{\varrho} = \omega\lambda$, $\frac{q'}{\varrho} = \omega\mu$, $\frac{r'}{\varrho} = \omega \,.\, \nu$ a sečtěme; obdržíme tím, udílíce veličinám λ, μ, ν význam směrových cosinusů:

$$\frac{1}{2}\,\frac{D(\omega^2)}{Dt} = \omega^2\left(\lambda^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \nu^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 2\lambda\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \ldots\right) \quad (15)$$

kdež:
$$\omega^2 = \frac{p'^2 + q'^2 + r'^2}{\varrho^2}$$

Faktor u ω^2 na pravé straně v (15) jest konečný, jsou-li jimi diff. kvocienty $\frac{\partial u}{\partial x} \ldots$ a jest jen úkonem času $\psi\,(t)$, jde-li

o *touž materiálnou částici.* Položíme-li v čase t osy souřadnic do hlavních os dilatačních a jsou-li l_1, m_1, n_1 velikosti tří hlavních dilatačních rychlostí, přejde faktor v: $l_1\lambda^2 + m_1\mu^2 + n_1\nu^2$ a jest známým úkonem času, známe-li pro touž částici v každém okamžiku velikost dilatačních rychlostí a polohu rotační osy vířivého pohybu vůči jim rovněž jakožto úkony časové. Integrace rovnice (15) od $t = o$ do t dává časový vzrost veličiny ω^2 ve formě:

$$log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \int_o^t \psi(t)\, dt; \qquad (16)$$

Integrační konstanta ω_0^2 jest hodnotou veličiny ω^2 pro $t = o$.

Lze místo (16) též psáti: $$\omega^2 = \omega_0^2\, e^{2\int_o^t \psi(t)\, dt.} \qquad (17)$$

Odtud jde, že bylo-li $\omega^2 = \omega_0^2$ nullou v čase $t = o$, že jím bude vždy.

Částice, která v jistém okamžiku nevířila, nebude víříti nikdy, a rychlosti její u, v, w dají se vždy vyjádřiti ve formě:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \; v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \; w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (18)$$

kdež $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ se dle *Helmholtze* nazývá potenciálem rychlosti.

Patrně lze φ zvětšiti o libovolný úkon časový, aniž by se tím změnilo rozdělení rychlostí u, v, w, hlavní to objekt problému. *Ustanovíme z pravidla, že φ současně s $u\,v\,w$ nullou býti má.* Klidu tekutiny odpovídá pak potenciál nullový.

§ 7. ***Prvý integrál rovnic* (3) *při pohybech víření prostých.*** Podmínkou jest tu existence potenciálu sil a vztahu $p = f(\varrho)$, jejž bez újmy všeobecné platnosti psáti lze ve formě: $1/\varrho = F'(p)$.

Patrně jest pak: $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X = -\frac{\partial}{\partial x}(F(p) + P)$ atd. Rovnice (3) neb (12) lze při $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \ldots$ uvésti na formu:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = o \; \frac{\partial S}{\partial y} = o \; \frac{\partial S}{\partial z} = o\,,$$

kdež položeno jest $$S = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2} V^2 + P + F(p) \qquad (19)$$

Patrně jest S na x, y, z nezávislé, t. j. ve všech místech *současně* stejné, a může býti jen úkonem času.

Při nestlačitelných tekutinách nastupuje na místo $F(p) \ldots \frac{p}{\varrho}$;

tedy:
$$S = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2} V^2 + P + \frac{p}{\varrho}. \tag{20}$$

Dosazením $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ldots$ do (4^a) obdržíme

$$\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = o \tag{21}$$

a pro tekutiny nestlačitelné prostě:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = o \tag{21a}$$

Hlavní podstatou každého problému bude nyní nalezení úkonu φ v jeho závislosti od t, x, y, z, tak aby současně vyhovoval podmínkám na stěnách tekutiny, buď klidných neb v pohybu se nalézajících. Jde-li o tekutiny prakticky nestlačitelné, dlužno integrovati známou *Laplace-ovu* rovnici (21^a).

Tlak se určí z rovnice (20) až na arbitrární úkon časový S, jehož původ vězí v té okolnosti, že by se na differ. rovnicích pohybu, v nichž se p vyskytuje ve formách $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$, nic nebylo změnilo, kdyby p bylo zvětšeno o libovolný úkon časový. Dlužno tudíž ještě věděti časový průběh tlaku v jistém místě daném. V mnohých případech jest v nepřítomnosti pohybu ($\varphi = o$) tlak na času nezávislý (hydrostatická část tlaku). Tehdy jest i S na času nezávislé. Jsou-li v tekutině obsažena pohyblivá tělesa, známe-li pak mimo síly, jimž podrobena jsou, ještě tlaky na ně působící, můžeme pohyb jejich ustanoviti, na př. dle *známých* předpisů, jde-li o tělesa tuhá.

U těles plynovitých najdeme differenciální rovnici, jíž φ uvnitř plynu vyhovuje, eliminujíce z $p = f(\varrho)$, pak z (19) a (21) p, ϱ. Tato operace byla dosud jen provedena při problémech povahy akustické. Fysikální význam úkonu $F(p)$ vyskytujícího se v (19) lze následovně vyšetřiti. Mysleme si hmotnou jednotku plynu, jehož tlak p_1 a hustota ϱ_1 hoví rovnici: $p_1 = f(\varrho_1)$, uzavřenu v elastické obálce, na níž působí zevně tlak p_1, a celek v klidu. Původní objem plynu budiž v_1; tedy bude $v_1 \varrho_1 = v\varrho = 1$, když se byl plyn postupným uvolňováním tlaku (na obal) rozpjal velmi pomalu na objem v při hustotě ϱ a tlaku p.

Práce plynem vykonaná děje se tu na útraty vniterné jeho potenciálné energie, klesnuvší z E_1 na E, tedy:

$$E_1 - E = \int_{v_1}^{v} p dv = pv - p_1 v_1 - \int_{p_1}^{p} v dp = \frac{p}{\varrho} - \frac{p_1}{\varrho_1}$$

$$- \int_{p_1}^{p} \frac{1}{\varrho} dp = \frac{p}{\varrho} - \frac{p_1}{\varrho_1} - F(p) + F(p_1)$$

Odtud jde $F(p) = \frac{p}{\varrho} + E + const$ a po dosazení do (19) a kontrakci konstanty s beztoho neurčitým S:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} + (E + \tfrac{1}{2} V^2) + P = S \qquad (19^a)$$

$E + \frac{1}{2} V^2$ representuje tu součet z kinetické a potenciálné energie hmotné jednotky plynové.

Příklady.

a) Z nádoby dole otvorem opatřené vytéká kapalina v paprsku. Je-li účinkující silou jen tíže, bude

$$X = Y = o,\ Z = - \frac{\partial P}{\partial z} = -g$$

tedy $P = gz$, čítáme-li osu z vertikálně nahoru.

Budiž V_1 rychlost, p_1 tlak v *horním* niveau z_1, za to v paprsku (v niveau z) V a p a budiž tok již ustálený, čehož se docílí vhodným přítokem tekutiny na niveau hořejším.

Z rovnice (20), v níž $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = o$ položiti jest, obdržíme:

$$\tfrac{1}{2}(V^2 - V_1^2) + \frac{p - p_1}{\varrho} = g(z_1 - z)$$

V místech, kde paprsek má po celém svém průřezu týž tlak (vzduchu) jako horní niveau bude:

(22) $\qquad V^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z)$ $\qquad$ (vzorec *Toricelli-ho*)

b) Vytékejž plyn, jehož tlak p_1 se uvnitř reservoiru na stálé výši udržuje, úzkým otvorem a ustáleně. Zanedbáme-li živou sílu hmotné jednotky $\frac{1}{2} V_1^2$ uvnitř nádoby vůči oné v paprsku $\frac{1}{2} V^2$ a také tíži, bude dle (19):

$$F(p_1) - F(p) = \tfrac{1}{2} V^2 \qquad (23)$$

Při stálé temperatuře jest $p = KT\varrho$, tedy $\varrho = \frac{p}{KT} = \frac{1}{F'(p)}$,

$F(p) = TK \log p$, a: $2\,TK \log \frac{p_1}{p} = V^2$ (K jest konstanta plynová.)

c) *Analogon vzorce* (19) dá se najíti i při pohybech vírových (viz § 56). Je-li pohyb časově ustálen, to jest nemění-li se během času v libovolném místě prostoru ani u, v, w, ani p, ϱ, T, jest věc jednodušší. Vyvolme si určitou částici a stopujme ji na dráze její, která jest následkem ustanovení v prostoru utkvělou. Jsou-li směrové cosinusy dráhy v jistém místě: $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ a rychlost V, bude zde $u = V\frac{dx}{ds}$, $v = V\frac{dy}{ds}$, $w = V\frac{dz}{ds}$.

Z rovnic (12), v nichž $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = o$ položíme, jde pak, násobíme-li je po sobě na $\frac{dx}{ds}ds$, $\frac{dy}{ds}ds$, $\frac{dz}{ds}ds$, sečtením a integrací dle s od bodu *dráhy 1* ku bodu dráhy *2* při supposici $p = f(\varrho)$ a zkráceném označení $G = \frac{1}{2}V^2 + F(p)$

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)ds = \int_1^2 \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)ds$$

neb

$$\Big/_1^2 \left[\tfrac{1}{2}V^2 + F(p)\right] = \int_1^2 \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)ds \tag{24}$$

Existuje-li potenciál sil, máme větu, že

$$\tfrac{1}{2}V^2 + F(p) + P \tag{25}$$

jest stálým na *téže trajektorii určitého materiálného bodu.*

d) Rozdělení elektrických a magnetických silokřivek v prostoru, v němž není hmot elektrických neb magnetických, odpovídá jak známo rovnici *Laplace-ově.*

Tak na př. jest potenciálem hmotné jedničky, nalézající se ve středu souřadnic, výraz $\varphi = \frac{1}{r}$. Intensitě síly $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ odpovídá v problému hydrodynamickém rychlost směru radiálného, ubývající s kvadrátem distance r. Takový pohyb vznikne na př. radiálným a všude stejným pohybem kulovité membrány v tekutině. Je-li V_0 rychlost na povrchu $r = R$, bude v distanci r.. $V = V_0 \frac{R^2}{r^2}$; jest tedy potenciálem rychlosti výraz:

$$\varphi = -\frac{V_0 R^2}{r},$$

splňující již podmínku, že jest nullou, je-li membrána v klidu. Odtud jde se zřetelem na

$$\frac{dR}{dt}=V_0 \quad : \frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\left(\frac{dV_0}{dt}\frac{R^2}{r}+2V_0^2\frac{R}{r}\right).$$

Tlak jde ze vzorce (20). Není-li zevních sil ($P=0$) a ustanoví-li se, že p jest v nekonečnu nullou, bude $S=0$, a tlak na povrchu membrány:

$$p_0=\varrho\frac{dV_0}{dt}R+\tfrac{3}{2}V_0^2\varrho.$$

Budiž M hmota celé membrány, $d\omega\frac{M}{4\pi R^2}$ část její příslušná k plošnému elementu $d\omega$, $Hd\omega$ síla zevní působící ve směru radia na tento element. Pak se pohybuje $d\omega$ dle zákona:

$$\frac{dV_0}{dt}d\omega\frac{M}{4\pi R^2}=Hd\omega-p_0 d\omega=Hd\omega-\varrho\frac{dV_0}{dt}R\,d\omega-\tfrac{3}{2}V_0^2\varrho d\omega$$

neb
$$\frac{dV_0}{dt}\left(M+4\pi R^3\varrho\right)=4\pi R^2H-6\pi R^2\varrho V_0^2.$$

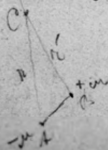
Pohyb jest tudíž takový, jako by se hmota membrány zvětšila o trojnásobnou hmotu vytlačené tekutiny a jako by působil odpor úměrný ploše a čtverci rychlosti. Koná-li membrána velmi malé kmity, tak že R za stálé a V_0^2 vedle $\frac{dV_0}{dt}$ za nekonečně malé považovati lze, je-li tedy síla zevní povahy elastické, $H=-\beta^2\zeta$, kdež ζ exkursi povrchového bodu znamená, bude skrz $\frac{d\zeta}{dt}=V_0$:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-\frac{4\pi R^2}{M+4\pi R^3\varrho}\beta^2\zeta.$$

Rovnice, již snadno integrovati lze, praví, že se perioda kmitů vůči oné ve vzduchoprázdném prostoru prodlouží v poměru

$$\sqrt{1+\frac{4\pi R^3\varrho}{M}}.$$

e) V posici A, $(a\,b\,c)$ nalézej se magnetická hmota $-\mu$, v nekonečně blízkém místě B, $(a+da,\ b,\ c)$ hmota $+\mu$, konečně budiž v místě C, $(x,\ y,\ z)$ bod plynulý. Zovme $AC=r$, $BC=r'$. Potenciál dvojbodu či elementárného magnetu v C jest: $\frac{\mu}{r'}-\frac{\mu}{r}$ neb



$$\mu \,.\, da \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{da} = (\mu da) \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right);$$

μda, moment magnetu, budiž konečný. V hydrodynamickém analogon klademe $\varphi = H \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) = - H \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = - H \frac{a - x}{r^3}$;

Odtud:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H}{r^3} - \frac{3H}{r^3} \frac{(x-a)^2}{r^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{3H}{r^3} \frac{(y-b)(x-a)}{r^2} \qquad (26)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{3H}{r^3} \frac{(z-c)(x-a)}{r^2}.$$

Komponenta rychlosti tekutiny v C dle směru AC jest:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{x-a}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{y-b}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{z-c}{r} \quad \text{čili} \quad - \frac{2H}{r^3} \frac{x-a}{r}.$$

Nyní si mysleme, že se v A nalézá centrum tuhé koule o poloměru R, pohybující se okamžitě rychlostí $u_0 = \frac{da}{dt}$ ve směru osy x-ové. Nechme výraz φ platiti pro tekutinu kouli až do nekonečna obklopující. Povrchový bod koule má rovněž rychlost u_0 a směrem radia jeho složku: $u_0 \frac{x-a}{R}$; sousedící bod tekutiny má radiálnou rychlost $- \frac{2H}{R^3} \frac{x-a}{R}$. Ustanovíme-li tudíž $H = - \frac{R^3 u_0}{2}$, bude relativná jejich rychlost ve směru normály nullou a potenciál rychlosti

$$\varphi = \frac{R^3 u_0}{2} \cdot \frac{a-x}{r^3} \qquad (27)$$

bude udávati, jak v tekutině do nekonečna sahající rychlosti rozděleny jsou, má-li koule ve směru osy x-ové okamžitou rychlost u_0.

Potenciál $\frac{R^3}{2} v_0 \frac{b-y}{r^3}$ odpovídá kouli téhož radia v téže posici pohybující se rychlostí $v_0 = \frac{db}{dt}$ ve směru osy y-ové a podobně $\frac{R^3}{2} w_0 \frac{(c-z)}{r^3}$ pohybu dle osy z.

Bude tedy lze považovati výraz:

$$\varphi = \frac{R^3}{2r^3}[u_0(a-x) + v_0(b-y) + w_0(c-z)] \tag{28}$$

za potenciál rychlosti, má-li koule okamžitě rychlosti u_0, v_0, w_0; neboť *Laplace-ově* rovnici vyhovuje každý summand ve φ a relativná rychlost tekutiny a koule ve směru normály povrchové jest nullou; současně jest φ v nekonečnu nullou.

Nazveme-li: $u_0(a-x) + v_0(b-y) + c_0(z-c)$ krátce s, bude

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{R^3 u_0}{2r^3} - \frac{3}{2}\frac{R^3}{r^4}s\,.\,\frac{x-a}{r} \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{R^3 v_0}{2r^3} - \frac{3}{2}\frac{R^3}{r^4}s\,.\,\frac{y-b}{r} \\ w &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{R^3 w_0}{2r^3} - \frac{3}{2}\frac{R^3}{r^4}s\,.\,\frac{z-c}{r} \end{aligned} \tag{29}$$

Odtud:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \frac{R^6}{4r^6}(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{R^6}{r^6}[u_0(x-a) + v_0(y-b) + w_0(z-c)]^2$$

Dále jest:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{R^3}{2r^3}\left[\frac{du_0}{dt}(a-x) + \frac{dv_0}{dt}(y-b) + \frac{dw_0}{dt}(c-z) + u_0^2 + v_0^2 + w_0^2\right]$$

Tlak p daný vzorcem (20) rozdělme na hydrostatickou část $p_1 = -\varrho P$ a na hydrodynamický díl $p_2 = \varrho S - \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}V^2\varrho$. Arbitrárný úkon S musíme voliti nullou, má-li v nekonečnu p_2 býti nullou, to jest má-li zde existovati jen *statické* rozdělení tlaku. Tlaky, účinkující na kouli, dají se složiti ve složky dle tří os souřadnicových. Hydrostatické části jejich buďtež: $P_1^{(x)}$, $P_1^{(y)}$, $P_1^{(z)}$, hydrodynamické $P_2^{(x)}$, $P_2^{(y)}$, $P_2^{(z)}$. Patrně jest:

$$P_1^{(x)} = -\int d\omega\,.\,p_1\frac{x-a}{R} = \varrho\int d\omega\frac{(x-a)}{R}P$$

$$P_2^{(x)} = \varrho\int d\omega\frac{x-a}{R}\left[\frac{1}{2}V^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{r=R},$$

kdež $d\omega$ jest elementem povrchu kulového.

Zaveďme k vůli pohodlí $x-a=\xi$, $y-b=\eta$, $z-c=\zeta$, a poznamenejme, že $\int d\omega\,.\,\xi\eta = \int d\omega\,.\,\xi\,.\,\zeta = \int d\omega\,\eta\zeta$ jest nullou,

protože se vždy dva a dva summandy v integrálu ruší, kdežto $\int d\omega \,.\, \xi^2 = \int d\omega \,.\, \eta^2 = \int d\omega \,.\, \zeta^2 = \frac{1}{3} \int d\omega \,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{4R^2\pi \,.\, R^2}{3}$.
Podobně jest $\int d\omega\, \xi \eta^2 = \int d\omega\, \xi^3 = \int d\omega\, \xi \,.\, \zeta^2$ nullou, tedy

$$\int d\omega \frac{x-a}{R} V^2 = 0, \text{ a}$$

$$P_2^{(x)} = -\frac{4\pi R^3 \varrho}{6} \frac{du_0}{dt} = -\frac{4\pi R^3 \varrho}{6} \cdot \frac{d^2 a}{dt^2}.$$

Označíme-li zevní síly na kouli účinkující, písmeny X_e, Y_e, Z_e, hmotu její m, máme pro pohyb její se zřetelem na x-ovou osu:

$$m \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{m'}{2} \frac{d^2 a}{dt^2} + P_1^{(x)} + X_e,$$

kdež $m' = \frac{4R^3\pi\varrho}{3}$ jest hmotou tekutiny vytlačené, neb konečně:

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{m'}{2}\right) \frac{d^2 a}{dt^2} &= P_1^{(x)} + X_e \\ \left(m + \frac{m'}{2}\right) \frac{d^2 b}{dt^2} &= P_1^{(y)} + Y_e \\ \left(m + \frac{m'}{2}\right) \frac{d^2 c}{dt^2} &= P_1^{(z)} + Z_e \end{aligned} \tag{29a}$$

Koule pohybuje se tudíž tak, jako by hmota její zvětšena byla o $\frac{m'}{2}$ a jako by mimo síly zevní na ni účinkovaly hydrostatické tlaky dle zvšeobecnělého principu *Archimedova*, jichž původ vězí v zevních silách na tekutinu účinkujících. Jde-li na př. jen o tíži, bude $P = gz$, $P_1^{(x)} = \varrho \int d\omega \frac{\xi}{R} gz = \varrho \int \frac{d\omega}{R} (\zeta + c) \xi g = 0$, podobně $P_1^{(y)} = 0$, a $P_1^{(z)} = \frac{\varrho g}{R} \int d\omega \,(\zeta^2 + c\zeta) = m' g$, což odpovídá obyčejné formě zákona *Archimedova*. Koule musí se tudíž za nepřítomnosti zevnějších sil *pohybovati rovnoměrně*. Výsledek jest ve sporu se zkušeností.

Příčinou nesouhlasu jest z menší části nedokonalost skutečných tekutin, z větší části snaha jejich, tvořiti se zřetelem na rozdělení rychlostí plochy diskontinuit. Rozdělení zde akceptované jest naprosto spojité, a jak z pozdějších výkladů na jevo vyjde, také *jediné spojité rozdělení*, které se s pohybem koule srovnává. Rozpojitost jest tedy jedině možným výkladem

pro hlavní část odchylného od skutečnosti výsledku. Jsou případy (viz konec VII. kap.), kdy vedle spojitého i rozpojité rozdělení udati lze. Odpory proti pobybu těles odtud vypočtené souhlasí lépe s měřením. (Viz též konec § 22.) V následujících čtyřech kapitolách budeme se výhradně zabývati theorii spojitého rozdělení rychlostí nehledíce tou měrou k upotřebitelnosti v praxi technické, jako k úzké souvislosti se zjevy elektromagnetickými. Samy o sobě jsou problémy tohoto druhu i s mathematického stanoviska velezajímavé a byly objektem bádání pro nejbystřejší hlavy našeho věku.

Kapitola III.

§ 8. ***Všeobecné vlastnosti potenciálu rychlosti u tekutin nestlačitelných.*** Je-li F hodnotou konečného a spojitého úkonu polohy v bodě x, y, z, F_1 hodnotou jeho v nekonečně blízkém místě, které ve směru s (o cosinusech λ, μ, ν) od prvého vzdáleno jest o velmi malou délku ds, nazýváme $(F_1 - F)/ds$ čili $\frac{\partial F}{\partial s}$ differenciálným kvocientem úkonu F ve směru s; patrně jest měrou rychlosti, s kterou F se směrem tímto zvětšuje.

Z rovnice: $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{F(x + ds\,\lambda,\ y + ds\,.\,\mu,\ z + ds\,.\,\nu) - F(x,\ y,\ z)}{ds}$ $= \frac{\partial F}{\partial x}\lambda + \frac{\partial F}{\partial y}\mu + \frac{\partial F}{\partial z}\nu$ vyplývá, že $\frac{\partial F}{\partial s}$ jest součtem průmětů tří osových diff. kvocientů na směr s. Differenciálné kvocienty dle dvou *protivných* směrů mají tedy znamení protivné a jsou numericky stejné.

a) Složkou výsledné rychlosti dle směru s bude při potenciálu rychlosti φ výraz: $u\lambda + v\mu + w\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, jenž udává, jak silně φ směrem tím *vzrůstá*. Náleží-li s rychlosti *výsledné*, ve vlastním směru zajisté kladné, bude i $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ kladné; lze tedy říci, *že skutečný pohyb vždy se děje směrem rostoucího* φ. (Jest to patrně konsekvencí nahodilého ustanovení: $u = + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$..;

v elektrostatice definuje se na př. síla X vzorcem $= -\frac{\partial P}{\partial x}$ a výsledné síly tu mají směr od *vyššího* k *nižšímu* potenciálu.)

b) Plochy, v nichž φ jest stejné, nazývají se plochami stejného potenciálu. Výsledné rychlosti stojí na nich vždy *kolmo*; neboť komponenty s plochou rovnoběžné jsou nullou dle definice její.

c) Naneseme-li v okamžiku t na přímku, jež v bodě A ve směru výsledné rychlosti zřízena jest, nekonečně malou délku AB, podobně v bodu B přímku BC atd., obdržíme křivku ABC, tak zv. *čáru proudovou*, která pro každou na ní ležící částici tekutiny udává směr rychlosti výsledné v témže čase t. Při ustáleném pohybu, kdy se v libovolném bodě *prostorovém* ani tlak, ani rychlost, ani směr její během času nemění, jest proudokřivka zároveň trajektorií bodů na ní se nalézajících. Jinak jest trajektorií jen v časovém elementu mezi t a $t + dt$. Bod tekutý nalézající se v čase t v místě A dojde sice po čase dt do polohy B, neběží však dále ve směru BC, protože směr rychlosti v B za času $t + dt$ jest jiný než v čase t.

d) Dvě plochy stejného potenciálu se nesekou, jelikož by v průseku existovala dvojí normála a dvojí směr rychlosti, což nemožné jest, vyjmeme-li případ, kdy rychlost zde se vůbec nulle rovná.

e) *Uvnitř tekutiny nemá potenciál rychlosti, zůstane-li konečným a spojitým, ani maxima ani minima.* Kdyby v bodě A φ bylo minimem, měla by rychlost na malé ploše kolem A všude směr od A odvrácený a A by bylo *bodovým pramenem výtokovým* o radiálné rychlosti nekonečně veliké. Podobně se to má s případem maxima.

f) Je-li φ hodnotou nějakého úkonu v bodě A, jsou-li $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, φ_3, $\varphi_{11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\varphi_{22} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, φ_{12} konečné hodnoty diff. kvocientů v témže místě, a φ' hodnotou úkonu ve velmi blízkém místě $B: x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta$, bude dle *Taylorovy* věty:

$$\varphi' = \varphi + \varphi_1\xi + \varphi_2\eta + \varphi_3\zeta + \frac{1}{1.2}(\varphi_{11}\xi^2 + \varphi_{22}\eta^2 + \varphi_{33}\zeta^2 + 2\varphi_{12}\xi\eta + ..)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(\varphi_{111}\xi^3 + \ldots + \ldots$$

Budiž $d\omega$ elementem povrchu koule, položené bodem B kolem A jakožto centra s radiem R velmi malým. Násobme φ'

elementem $d\omega$ a integrujme přes povrch. Dle toho, co o integrálech zde se vyskytujících řečeno bylo (ku konci kap. II.), jest až na veličiny o řádu ξ^4..:

$$\int \varphi' d\omega = \varphi \int d\omega + \tfrac{1}{2}(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}) \frac{\int d\omega \,.\, R^2}{3}.$$

Nazvěme podíl $\int \varphi' d\omega : \int d\omega$ střední hodnotou výrazu φ na povrchu kulovém. Splňuje-li φ *Laplace-ovu* rovnici: $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = 0$, jest ona *střední hodnota rovna hodnotě v centru.* Na povrchu koule musí tudíž některá φ býti větší a některá menší než φ v centru, tak že i odtud nemožnost maxima a minima veličiny φ vychází.

g) *Absolutní hodnota výsledné rychlosti nemůže míti uvnitř tekutiny maxima.* Kdyby se tak stalo v bodě A, položme osu z do směru rychlosti výsledné, již zoveme $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0$. Jelikož však $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ jako φ *Laplace-ově* rovnici vyhovuje, naleznou se na malé kouli kolem A zajisté body, jejichž $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, k vůli rozlišení $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1$ nazvané, jest *větší.* Jest tedy někde na povrchu $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1^2 > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^2$, tudíž a fortiori $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1^2 > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^2$, což jest ve sporu s praemissou maxima. *Maxima rychlosti leží tudíž vždy na hranicích prostoru.*

h) Na povrchu *klidných stěn* jest

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos nz = 0,$$

na povrchu stěn pohyblivých: $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_1 \cos nx + v_1 \cos ny + w_1 \cos nz$,

při čemž u_1, v_1, w_1 rychlost stěnového bodu označuje.

i) *Pohyby s minimem absolutní rychlosti nulle rovným v jednotlivých bodech a na čarách jsou možné.* Má-li na př. v libovolně daném pohybu bod A jistou rychlost V, nalezneme nový možný pohyb, při němž A v klidu jest, udělíme-li tekutině i hranicím rychlost $-V$. Proudí-li tekutina trubicí, která má *proměnlivý* průřez *kruhový* s minimy a maximy radia, tedy se děje v těchto místech proudění parallelně k ose rotační, tak že rychlost může býti stejnou co do velikosti a směru na celé čáře kruhové. Způsobem nahoře uvedeným lze pak docíliti nového pohybu,

při němž jest rychlost na téže kruhové čáře nullou. *Za to nemůže, předpokládá-li se spojitost komponent u, v, w, rychlost býti nullou ani na ploše ani v nějaké prostorové partii tekutiny*, třeba sebe menší. Sestrojme si k ploše jinou blízkou, na níž rychlost nullou již není, volme na ní element $d\omega'$ a veďme obvodem jeho přímky udávající směry rychlosti až k ploše původní, tak že se zde vysekne element $d\omega$. Z tělesa omezeného plochami $d\omega$, $d\omega'$ a pláštěm může tekutina plochou $d\omega'$ unikati (neb vnikati), aniž by unikala neb vnikala ostatními jeho plochami, čímž se princip nestlačitelnosti porušuje. Je-li za druhé rychlost nullou v jisté partii prostoru, jest nullou i na povrchu jeho, a to jest nemožné dle věty právě dokázané. Rychlost může však *v části* prostoru býti nullou, je-li: α) v *celém* prostoru nullou, tak že odtud konkludujeme větu, že potenciál (s podmínkou spojitosti) jest v celém prostoru stálým, je-li v jedné partii prostoru stálým, β) aneb jsou-li u, v, w úkony *rozpojité.* Tak na př. může v nepřítomnosti vniterného tření vodorovná vrstva prouditi přes vodorovný povrch vody *klidné.*

j) Proudové čáry mohou v jistých případech býti v sobě uzavřené. Budiž na př. v tekutině do nekonečna sáhající obsažen nekonečně dlouhý tuhý kruhový válec s osou, která od $-\infty$ do $+\infty$ koinciduje s osou z. Kolem něho může se tekutina točiti s rychlostí $f(r)$, která jest jen závislá na distanci r od osy válcové. Položme tedy: $u = -\frac{f(r)}{r} y$, $v = \frac{f(r)}{r} x$, $w = o$, $r^2 = x^2 + y^2$. Rovnice $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o$ jest patrně při jakémkoli úkonu $f(r)$ identicky splněna. Při pohybu potenciálovém musí býti: $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = o$ neb: $\frac{2f}{r} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{r}\right) = o$ neb:

$$f(r) = \frac{C}{r};\ u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{Cy}{r^2};\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Cx}{r^2};\ \varphi = C \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Vyvolíme-li si jistý bod v tekutině A a postupujeme-li ve směru, ve kterém se tekutina točí, roste potenciál ustavičně, protože ve směru skutečného pohybu vždy růsti musí a dosáhne po oběhu dokola hodnoty $2\pi C$, po dvou obězích $4\pi C \ldots$; jest tedy potenciál φ *mnohoznačným*, jak již analytická forma jeho dokazuje. Tento případ má analogon v magnetickém poli, které vzbuzuje nekonečně dlouhý rovný drát na koncích s póly batterie spojený. Silokřivky jsou zde koncentrické v sobě uza-

vřené čáry kruhové. Mnohoznačnost potenciálu magnetického má jednoduchý fysikálný význam. Síly $X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ldots$ účinkující na jednotkový severní pól vykonají na libovolné dráze dva body *1*, *2* spojující práci $\int_1^2 \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) ds = \varphi_1 - \varphi_2$ rovnou hodnotě, o kterou při přechodu z *1* do *2* potenciál klesl. Jestliže tedy potenciál magnetický dle své mnohoznačné povahy po každém úplném oběhu kol drátu o týž obnos ($4\pi \times$ intensita v míře elektrom.) klesne, znamená to vlastně, že magnetické síly pokaždé konají touž určitou práci, která jest měrou intensity proudové (její ekvivalent pochází na př. z chemické energie galv. článků).

Podobné případy mnohoznačných potenciálů rychlosti vyskytují se, je-li v tekutině v sobě uzavřený prsten z tuhého materiálu, kol něhož tekutina cirkulovati může v uzavřených čarách proudových.

Nastává tudíž otázka, za kterých okolností jest potenciál rychlosti jednoznačným úkonem posice a jaké další vlastnosti míti bude, je-li úkonem mnohoznačným.

Úvahy tohoto druhu provedeme pomocí následující věty.

§ 9. ***Věta Stokesova a její konsekvence.*** Nakresleme si v rovině xz čáru v sobě uzavřenou, na př. ellipsu a zvolme na ní bod A jakožto východiště, od kterého čítáme délku oblouku s, a sice kladně, pohybujeme-li se se zřetelem na osu y-ovou po křivce *proti* směru rafiky hodinové. Buďtež B, C, D body jiné v tomto směru po sobě následující.

Buďtež dále X, Z jednoznačné konečné úkony souřadnic x, z; směrové cosinusy tečné (ve směru rostoucího s) v některém bodu křivky jsou $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Jest vyšetřiti vlastnosti integrálu

$$J = \int_A^A \left(X\frac{dx}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

vzatého kolem křivky $ABCDA$ ve směru rostoucího s. Poznamenejme napřed, že, spojíme-li dva libovolné body prostoru *1*, *2* libovolnou čarou, a značí-li X, Y, Z tři na směru s nezávislé úkony posice, že pro integrace na *téže* křivce vzaté jednou od *1* do *2*, podruhé od *2* do *1* platí vztah:

$$\int_1^2\left(X\frac{dx}{ds}+Y.\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds=-\int_2^1\left(X.\frac{dx}{ds}+Y.\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Při tom jest předpokladem, že v integrálu *1 2* oblouk s se čítá kladně od *1* ku *2*, v integrálu druhém od *2* do *1*. Následkem toho jsou differenciály ds v obou integrálech *absolutními* inkrementy délky, X, Y, Z nezávisí na s, směrové cosinusy tangent mají však v témže místě křivky v obou integrálech hodnoty protivné. Tím jest věta dokázána. Spojkou CA rozdělme nyní plochu, uzavřenou obvodem $ABCDA$, na dvě: $ABCA$, $ACDA$. Integrály kolem kontur jejich zovme zrovna tak. Dle věty právě dokázané jest:

$$(ABCA)+(ACDA)=(ABC+CA)+(AC+CDA)=$$
$$ABC+CDA=ABCDA.$$

Integrál kolem kontury hlavní plochy jest tedy roven oběma integrálům kol kontur dílčích ploch dohromady. Oběh jest arciť vždy směru téhož. Každou z dílčích ploch můžeme opět rozděliti na dvě atd.

Rozdělíme-li tudíž hlavní plochu na libovolný počet dílčích ploch, jest integrál přes konturu hlavní plochy roven součtu integrálů přes kontury všech ploch dílčích. Serií nekonečně blízkých přímek rovnoběžných jednak k ose x, jinak k ose z rozdělme ji na nekonečně veliký počet malých obdélníků o stranách a, c uvnitř, a na nekonečně veliký počet malých trojúhelníků podél kontury hlavní plochy. Tyto jsou proti prvým v infinitesimálné minoritě a jsou-li integrály kolem takové malé plochy vesměs veličinami téhož řádu, bude se $ABCDA$ až na veličiny vyššího řádu rovnati součtu integrálů přes všechny malé obdélníky. Mysleme si jeden z nich v posici x, z. Na straně a přivrácené k ose x-ové koinciduje směr s se směrem $+x$, jest tedy $\frac{dx}{ds}=1$, $\frac{dy}{ds}=0$, na protější a straně jest $\frac{dx}{ds}=-1$, $\frac{dy}{ds}=0$; ds jest v obou případech $=a$. Příspěvek jejich k integrálu jest: $a(X.1+0.Y)_{\text{dole}}+a(X.-1+0.Y)_{\text{nahoře}}$

$$\text{neb } -\frac{ac\,(X_{\text{nahoře}}-X_{\text{dole}})}{c}.$$

Jsou-li i diff. kvocienty úkonu X konečné, máme jedno-

dušeji $-ac\frac{\partial X}{\partial z}$. Příspěvek druhých stran c jest, jak podobnou úvahou najdeme, $+ac\frac{\partial Z}{\partial x}$.

Odtud jde, píšeme-li za $ac\ldots dx\,.\,dy$:

$$\int ds\left(X\frac{dx}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)=\int(X\,dx+Z\,dz)=\iint dx\,dy\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right) \quad (1)$$

Značiž nyní S libovolnou křivku *prostorovou*, $ABCDA$ průmět její na rovinu xz, F libovolnou plochu položenou skrz konturu S o rovnici $y=f(x,z)$, pak: $f_1=\frac{\partial f}{\partial x}$, $f_3=\frac{\partial f}{\partial z}$, $f_{13}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$, dále $u=u(x,y,z)$, v, w tři *jednoznačné*, *konečné* a spojité *úkony* posice x, y, z s konečnými diff. kvocienty, a konečně

$$J=\int\left(u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds}\right)ds=\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$$

integrál přes konturu S vzatý ve směru, jemuž v průmětu na xz odpovídá směr $ABC\ldots$ Patrně jest $dy=f_1dx+f_3dz$ a

$$J=\int(X\,dx+Z\,dz)=\int\left(dx\,(u+vf_1)+dz\,(w+f_3v)\right).$$

Nahradíme-li v uvw souřadnici y dle vzorce $y=f(z,x)$, bude X a Z úkonem jen veličin x, z, jež jsou zároveň souřadnicemi některého bodu na S a průmětu jeho na $ABC..A$. Dále bude:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}f_1+f_3\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}f_1\right)+f_{13}v$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}f_3+f_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}f_3\right)+f_{13}v,$$

tedy dle (1):

$$J=\iint dx\,dz\left[\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}+f_1\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+f_3\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Ve výrazech na pravé straně se vyskytující x, z náleží jednak bodu M uvnitř křivky $ABCA$, jednak bodu M_1 na ploše F, jehož průmětem jest M. Normála plochy v M_1 má dva protivné směry, z nichž ten za kladný zvolíme, který odpovídá ose $+y$-ové, jestliže křivka S se stane křivkou rovinnou a ku xz rovnoběžnou. Tehdy jest: $dx\,.\,dz=d\omega\cos ny$, kdež $d\omega$ označuje

element plochy F v místě M_1. Se zřetelem na

$$\frac{f_1}{\cos nx} = -\frac{1}{\cos ny} = \frac{f_3}{\cos nz}$$

obdržíme konečně:

$$\int\left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right)ds = \int(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

$$= \int d\omega\left(\cos nx\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \cos ny\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \cos nz\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \quad (2)$$

Prostorový vztah mezi směrem s za kladný zvoleným a normálou n lze vysloviti pravidlem, že, plujeme-li konturou S hledíce dovnitř plochy F, positivný směr normály leží po ruce *levé*. Který směr s za positivný zvolíme, jest nyní lhostejno; neboť obrácením jeho změní se též směr n v protivný, a zároveň s nimi levá i pravá strana *Stokesovy* rovnice (2).

§ 10. ***Podmínky jednoznačnosti pro potenciál rychlosti.*** Budiž dáno prostorové rozdělení rychlostí v jistém čase t. Za hodnotu potenciálu φ v bodě 0, ostatně zcela libovolném, ustanovme libovolnou hodnotu φ_0; potenciál φ v jiném plynulém bodě 1 (xyz) jest se zřetelem na vztah $d\varphi = u\,dx + v\,dy + w\,dz$ definován vzorcem:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^1 d\varphi = \int_0^1\left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right)ds \quad (2^a)$$

Integrál, jenž se na *jednu* z křivek body 0, 1 spojujících vztahuje, může patrně na *jiné* křivce s týmiž konci 0, 1 míti *jinou* hodnotu. Jednoznačnost potenciálu φ vyžaduje tedy, aby integrál byl na cestě nezávislým, to jest, aby integrál dokola křivky utvořené ze *dvou* libovolných cest 0, 1 byl nullou. Stane se tak dozajista, vyplňuje-li tekutina prostor té vlastnosti, že skrz *každou* uzavřenou a v tekutině obsaženou křivku lze položiti aspoň jednu plochu v tekutině úplně obsaženou. Tehdy jest, protože jde o pohyby nevířivé, pravá, tudíž i levá strana *Stokesovy* rovnice (2) nullou a požadovaná podmínka splněna.

Prostory s nahoře vytknutou vlastností zovou se *prostě* či *jednoduše souvislými*. Lze také říci, že se každá v nich obsažená křivka na *bod* kontrahovati dá, aniž by se meze prostoru překročily. Prostor, jenž na příklad leží mezi plochou koule a povrchem prstenu obsaženého ve vnitřku jejím, *není* prostě souvislým. Neb lze si mysliti uzavřené křivky kol prstenu,

které se na bod kontrahovati nedají, protože tomu povrch prstenu brání. Naproti tomu jest prostor mezi povrchem koule a povrchy jiných koulí uvnitř obsažených *prostě* souvislým.

V prostorech prostě souvislých může tedy existovati jen jednoznačný potenciál. Křivky proudové nemohou tu nikdy býti uzavřené, neb pak by integrál na levé straně rovnice (2) nikdy nemohl býti nullou, jelikož potenciál φ ve směru pohybu roste; *proudové čáry vycházejí a končí v hranicích prostoru.*

§ **11.** *O mnohoznačném potenciálu.* Nemíníme na tomto místě blíže se zabývati *Riemannovou* theorií o souvislosti ploch přenesenou na poměry prostorové; co zde uvedeme, vztahuje se na jednodušší případy názoru přímo přístupné.*)

Prostor, omezený jednoduše souvislou plochou a povrchy jednoduchých od sebe oddělených prstenů jest mnohonásobně souvislým. Napneme-li přes každý prsten blánu otvor jeho úplně zakrývající a čítáme-li obě strany její k hranicím *nového* prostoru, bude tento již prostě souvislým; neboť každá v sobě uzavřená křivka *nového* prostoru dá se bez překročení hranic prostorových kontrahovati na bod, a skrz každou se dá položiti plocha v prostoru úplně obsažená.

Vede-li na př. do nějakého tělesa uvnitř tekutiny při povrchovém bodě A kanál, který se uvnitř vidlicovitě rozdělí a v bodech povrchu B i C ústí, nedají se uzavřené křivky vstupující u A a vystupující u B na bod kontrahovati, rovněž jako ty ne, které u C vystupují; prostor souvisí mnohonásobně. Přikryjeme-li ústí B, nejsou prvé křivky již vůbec možné, přikryjeme-li i C, nejsou druhé křivky možné. Stupeň souvislosti se takovými blanami („*Querschnitt*", „*coupure*", po anglicku „*barriere*" zvanými) snižuje.

Prostor se nazývá n-násobně souvislým, stačí-li $n-1$ barrier na proměnění jeho v prostor jednoduše souvislý; dlužno však podotknouti, že $n-1$ nesmí býti tak veliké, aby se původní prostor proměnil barrierami na od sebe oddělené, tedy nesouvislé prostory.

Všechny v sobě uzavřené křivky K_1, K_2, které jen jeden jednoduchý prsten obepínají (viz obr. 1.), dají se, aniž by se meze prostoru překročily, tedy pouhou nepřetržitou transformací,

*) Na možnost mnohoznačných potenciálů upozornil nejprve *Helmholtz* v Crelle 55. Co později zde vyvinuto bylo, děkujeme hlavně W. *Thomsonovi.*

přivésti k splynutí. Dvěma z nich dá se vždy položiti omezená plocha v tekutině úplně obsažená a integrál:

$$\int\left(u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds}\right)ds$$

kol nich má hodnotu stejnou, volíme-li směry integrace s tak, aby splývaly, splynou-li křivky samy. K vůli pohodlí důkazu a bez újmy všeobecnosti mysleme si, že křivkami K_1 a K_2 jsou dva nad sebou stojící obvody kruhové, tedy plocha jimi položená pláštěm válcovým (viz obr. 2.). Bodem A_1 v K_1 a A_2 v K_2 veďme řez skrz plochu válcovou, k vůli názornosti poněkud širší. Plášť se tím promění v jednoduše souvislou plochu, ve čtyrúhelník v plášť stočený, jehož hranice jsou oba kruhy a obě strany řezu.

Dle Stokesovy věty jest pravá strana rovnice (2) vztahující se na plášť válce nullou, předně, poněvadž jest dle předpokladu v tekutině úplně obsažen, a za druhé proto, že jde o pohyby nevířivé. Jest tedy i nullou součet integrálů $\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$, zkrátka označených: $A_1K_1L_1A_1+A_1A_2+A_2L_2K_2A_2+A_2A_1$, a jelikož se A_2A_1 i A_1A_2 ruší, jest

$$A_2K_2L_2A_2=A_1K_1L_1A_1,$$

což se dokázati mělo.

Integrál kolem křivky K_1 *jeden* prsten objímající (zovme jej k_1) jest *jednou* karakteristickou značkou pohybu „cyklického“. Je-li prstenů více, bude každému z nich náležeti podobný integrál k_2, k_3. Precisněji mluveno bude *cyklických* konstant k_1, k_2, k_3 . . . tolik, kolik jest barrier.

Integrál na v sobě uzavřené křivce, která jde *dvěma prsteny zároveň*, na př. $ABCDA$ (obr. 3.) rovná se patrně součtu obou cyklických konstant $ABCA+ACDA$. Dvě rozličné integrační cesty z *0* do *1* mohou se tudíž jen tím od sebe lišiti, že jedna z nich vine se kol jednotlivých prstenů m_1, m_2, m_i krát, druhá m'_1, m'_2, m'_i krát. Dva rozličné integrály od *0 do 1* liší se tudíž o $\mu_1k_1+\mu_2k_2\ldots$, kdež μ_1, μ_2.. rovněž jako m a m' označují čísla celá. Je-li tudíž φ_0 arbitrární hodnota potenciálu φ v jistém za východiště sloužícím bodě *0*, jest potenciál v plynulém bodě *1*, definovaný vzorcem:

$$\varphi-\varphi_0=\int_0^1(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$$

mnohoznačným úkonem té vlastnosti, že rozličné možné hodnoty v bodě 1 se liší od sebe o součet z celých násobků konstant cyklických. (Podobnost s periodičnými moduly funkční theorie leží zde na snadě.)

Cyklické konstanty mohou v jiném čase býti jiné. Dokážeme, že jsou i na čase nezávislé, je-li potenciál sil, jimž tekutina podrobena jest, jednoznačným. Předešleme však následující i pro vířivé pohyby platnou větu.

§ 12. *Theorem všeobecný; časová závislost cyklických konstant.*

Budiž K libovolnou v sobě uzavřenou křivkou uvnitř tekutiny a $J = \int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ příslušným integrálem. Dva sousední body na ní A i B mají v čase t koordinaty (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Po čase dt zaujímají *materiálné* částice, jež se v A i B nalézaly, posice A', B' o souřadnicích

$$(x + u\,dt,\ y + v\,dt,\ z + w\,dt),$$

$$\left(x + dx + dt\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\right),$$

$$\left(y + dy + dt\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\right) \text{ atd.}$$

Difference souřadnic bodů A i B, které *byly* v čase t rovny dx, dy, dz, jsou v čase $t + dt$ dány vzorci:

$$dx' = dx + dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right),$$

$$dy' = dy + dt\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right),\ dz' = \ldots$$

Materiálné body, které v čase t ležely na křivce K, budou v čase $t + dt$ vytvořovati novou, opět uzavřenou křivku K', a příslušná hodnota integrálu J' bude, jelikož každé u, v, w se o $\frac{Du}{Dt}dt$ atd. zvětšilo, dána vzorcem:

$$J' = \int\left(dx'\left(u + \frac{Du}{Dt}dt\right) + dy'\left(v + \frac{Dv}{Dt}dt\right) + dz'\left(w + \frac{Dw}{Dt}dt\right)\right).$$

Jest však: $$dx'\left(u + \frac{Du}{Dt}dt\right) = u\,dx$$

$$+ dt\left(\frac{Du}{Dt}dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)u\right).$$

Bude tudíž

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{J'-J}{dt}=\int\left(dx\frac{Du}{Dt}+dy\frac{Dv}{Dt}+dz\frac{Dw}{Dt}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int\left(dx\frac{\partial V^2}{\partial x}+dy\frac{\partial V^2}{\partial y}+dz\frac{\partial V^2}{\partial z}\right), \qquad (3)$$

kdež $V^2=u^2+v^2+w^2$.

Druhý integrál kol uzavřené křivky K čili $\int d(V^2)$ jest nullou skrz jednoznačnost veličiny V^2. V prvém nahraďme (viz rovn. (3) § 7. kap. II.) $\frac{Du}{Dt}$ atd. hodnotou jeho $-\frac{\partial F(p)}{\partial x}+X$, atd.; $F(p)$ či $\frac{p}{\varrho}$ u tekutin nestlačitelných jest opět jednoznačnou funkcí, zbývá tedy:

$$\frac{dJ}{dt}=\int(dx\,X+dy\,Y+dz\,Z), \qquad (4)$$

aneb mají-li síly potenciál:

$$\frac{dJ}{dt}=-\int\left(dx\frac{\partial P}{\partial x}+dy\frac{\partial P}{\partial y}+dz\,.\frac{\partial P}{\partial z}\right). \qquad (5)$$

Při *jednoznačném* potenciálu sil jest $\frac{dJ}{dt}=0$, tudíž i *každá cyklická konstanta na čase nezávislou*, při potenciálu mnohoznačném jest časový vzrost její roven práci zevních sil na uzavřené křivce prsten obepínající. Při tom se arciť musí předpokládati, že práce jest v témže čase t stejnou na všech uzavřených křivkách, pro které i $\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$ stejným jest, kteroužto okolností se povaha zevních sil blíže ustanovuje.

§ 13. *Vznik cyklosy.* Obyčejné zevní síly, z nichž vlastně jen tíže v úvahu přichází, mají potenciál jednoznačný, nemohou tedy býti příčinou ani vzniku ani zániku cyklosy. Jsou-li k_1, k_2, k_i v jednom okamžiku nullou, budou jimi vždy a potenciál rychlosti jest pak i v mnohonásobně souvislých prostorech jednoznačným úkonem posice. Na jiném příkladě ukážeme možnost vzniku cyklického pohybu silami jiného původu.

Položíme-li na př. na pól vertikálně stojícího elektromagnetu misku se rtutí, již pomocí drátu v centru a na kraji s póly batterie spojíme, dostane se rtuť do rotace. Práce sil, jimž tu rtuť podléhá, nemůže býti nullou na uzavřené cestě;

mají tudíž síly buď potenciál mnohoznačný aneb dle názorů novější elektrodynamiky nemají potenciálu vůbec.

Jiným, arciť jen v myšlenkách možným, ale theoreticky veledůležitým experimentem vzbudíme (dle W. *Thomsona*) cyklosu, jestliže si geometrické barriery myslíme jakožto membrány z materiálu naprosto ohebného, jimž nad míru krátký ale silný impulsivný tlak udělen jest, jenž poháněje na jedné straně membrán tekutinu vpřed, nutí ji vrátiti se v místa jí opuštěná; arciť musí membrány v čas zmizeti, na př. se proměniti v tekutinu, jak *Thomson* obrazně se vyjadřuje. K této věci se ještě vrátíme. Dodejme následující: Hranice prostoru s pohyby bezvírovými nemusí býti vytvořeny povrchy prstenů *pevných*. Na jejich místa může nastoupiti prostor *touže* však *vířící* tekutinou vyplněný. Obrátíme se nyní k vyšetření podmínek, jimiž potenciál jednoznačně určen jest.

§ 14. ***Věta Greenova.*** Mysleme si prostor, *jednou* plochou F *úplně* uzavřený, na př. ellipsoid neb kouli. Objemovým elementem tohoto „integračního“ prostoru budiž $d\tau$, $d\omega$ elementem povrchu F. Značiž dále n normálu na povrchu F do *vnitř* prostoru čelící o směrových cosinusech $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$, pak

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial V}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial V}{\partial z}\cos nz.$$

Integrál:
$$J = \int U \frac{\partial V}{\partial n}\, d\omega,$$

v němž U i $\frac{\partial V}{\partial n}$ jsou *jednoznačné* úkony posice, dá se nahraditi součtem *dvou* podobných integrálů, rozdělíme-li prostor plochou či řezem S na dva: I a II, k jichž *hranicím* se integrace vztahovati mají. Hranicí prostoru I jest *jedna* část plochy F (již zoveme F_1) a *jedna* strana řezu S, kdežto druhá strana S a zbytek plochy: F_2 omezují prostor II. Patrně jest:

$$Int\, I + Int\, II = (Int\, F_1 + Int\, S) + (Int\, F_2 + Int\, S) = Int\, F.$$

Integrály přes obě strany společné stěny S se totiž ruší, jelikož po obou stranách téhož $d\omega$ jest U totéž, $\frac{\partial V}{\partial n}$ však protivně stejné, protože normály *kladně* čítané do integračních prostorů (I) a (II) mají směry protivné. Prostor II rozdělme na II^a, II^b, tyto opět na prostory od sebe oddělené a jednejme podobně s prostorem I. Takto pokračujíce můžeme říci, že

integrál přes plochu F hlavní prostor omezující se rovná součtu integrálů přes povrchy jednotlivých dílů prostorových, na něž původní prostor rozdělen byl.

Serií nekonečně blízkých a s rovinou $z = o$ rovnoběžných rovin jakož i jinými dvěma seriemi rovin rovnoběžných rovinám $x = o$, $y = o$ lze celý prostor rozděliti na nekonečně veliký počet pravoúhlých hranolků uvnitř a na nekonečně veliký počet malých jehlanců seřaděných podél povrchu F. Tyto jsou proti prvým v infinitesimálné minoritě. Lze tedy říci, že již součet integrálů přes povrchy hranolků jest až na veličiny vyššího řádu totožným s integrálem J. Integrál přes povrch *jednoho* hranolku o hranách a, b, c dá se takto vyjádřiti. Poněvadž směr n jde vždy *do* integračního prostoru, zde abc, bude na levé stěně bc směr n identický se směrem *kladné*, na pravé stěně se směrem *záporné* osy x-ové; tedy bude integrál přes tyto dvě plochy roven:

$$bc\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\text{levo}} - bc\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\text{pravo}} = -abc\,.\,\frac{\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\text{pr.}} - \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\text{levo}}}{a}$$

aneb
$$-abc\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -d\tau\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

jestliže *diff. kvocienty* úkonů U, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ jsou konečné.

Součet integrací přes *všechny* stěny jednoho hranolu dává podobně:

$$-d\tau\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right)$$

a součet přes *všechny* hranoly rovná se J.

Výsledek lze též psáti ve formě:

$$\int d\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$
$$= -\int U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega - \int U\Delta V\,.\,d\tau. \qquad (6)$$

Je-li integrační prostor omezen plochou F a povrchy libovolných těles uvnitř F, bude vždy možná naznačeným spůsobem rozděliti prostor integrační na hranolky a jehlance. V součtu integrálů $\int U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega$ přes povrchy všech dílčích prostorů zruší

se, je-li $U, \frac{\partial V}{\partial n}$ jednoznačné, integrály přes povrchy dvěma malým dílčím prostorům společné a za výsledek zbývá týž integrál vzatý přes povrch F a povrchy těles uvnitř F a ten se rovná opět až na veličiny vyššího řádu integrálům přes povrchy dílů hranolových. Věta (6) má tudíž platnost všeobecnou, jen že plošná integrace se vztahuje na *všechny* hraničné povrchy prostoru integračního. *)

Zamění-li se v (6) U i V, vznikne nová rovnice a z obou dohromady

$$\int d\omega \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) = -\int d\tau \,(U \Delta V - V \Delta U). \qquad (7)$$

Je-li $\Delta U = o$, $\Delta V = o$, máme speciálněji:

$$\int d\omega \, U \frac{\partial V}{\partial n} = \int d\omega \, V \frac{\partial U}{\partial n}. \qquad (7^a)$$

Stanou-li se U neb V nekonečně velikými buď v *bodu*, neb v *linii*, neb na *ploše neuzavírající* v sobě oddělenou část prostoru integračního, vyloučíme *bod* nekonečně malou *koulí*, *linii* těsně přiléhající plochou na koncích linie uzavřenou a *plochu* dvěma nekonečně blízkými plochami parallelními a na krajích pláštěm opatřenými z prostoru integračního, a čítáme tyto plochy k hranicím jeho.

Nastane-li nekonečnost na ploše, která v sobě uzavírá samostatnou část integračního prostoru I aneb je-li plocha ta plochou diskontinuity, obklopíme ji opět dvěma nekonečně blízkými plochami, napíšeme rovnici (6) pro prostor integrační mimo I, pak pro I a sečteme. Effekt jest ten, že rovnice (6) platí pro celý prostor, jen že obě strany plochy diskontinuity třeba čítati mezi plochy hraničné.

---

*) Zcela podobným postupem dokázali bychom:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = -\int U \frac{\partial V}{\partial x} \cos nx - \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} . d\tau \qquad (6^a)$$

a podobné dva vzorce, v nichž místo x stojí y a z, a jichž sečtením vznikne (6).

Čítáme-li normálu n kladně z integračního prostoru, třeba za $\cos nx$ psáti $-\cos nx$, za $\frac{\partial V}{\partial n} \ldots : -\frac{\partial V}{\partial n}$.

Ve větě (6a) jest vysloven mechanismus jakéhosi druhu *integrace per partes*, jejž si s prospěchem snadno zapamatovati lze.

Řečené illustrujme tímto příkladem.

Budiž $V = 1 : r$, kdež $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ jest distancí plynulého bodu x, y, z od bodu a, b, c. V prostoru mimo malou kouli bod abc vylučující jest $\Delta V = 0$, na povrchu jejím $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{R^2}$ (je-li R radiem koule), U na povrchu jejím liší se od $U(a, b, c)$ jen infinitesimálně, bude tudíž integrál $\int d\omega \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right)$ přes kouli roven výrazu: $-\frac{4R^2 \pi U(a, b, c)}{R^2} - \int \frac{r^2 d\varepsilon}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$, kdež $r^2 d\varepsilon$ se rovná elementu koule $d\omega$. Přejde-li R v limitu 0, máme místo (7):

$$4\pi U(a, b, c) = -\int \Delta U \cdot \frac{d\tau}{r} - \int d\omega \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) U\right). \quad (8)$$

§ 15. ***Kinetická energie pohybu.*** Předpokládejme, že existuje *jednoznačný* potenciál φ v prostoru integračním; jest to možná, je-li tento buď prostě souvislým aneb jsou-li cyklické konstanty nullou. Prostor budiž zevnější a vnitřními plochami úplně ohraničen. Dvojnásobná hodnota kinetické energie T dělená na hustotu tekutiny ϱ rovná se:

$$\int d\tau \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right].$$

Greenovou větou (6) obdržíme kladouce $U = V = \varphi$:

$$\frac{2T}{\varrho} = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega. \quad (9)$$

Lze tedy T vyjádřiti hodnotami φ a $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ na povrchu prostoru.

Z (9) usazujeme tuto větu: Konečný, jednoznačný a spojitý úkon φ, jenž uvnitř jistého úplně omezeného prostoru vyhovuje *Laplace-ově* rovnici, jest ve všech jeho místech nullou, potažmo stálým, je-li na hranicích prostoru φ potažmo $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ nulle rovno. Totéž zůstává v platnosti, jestliže na jedné partii hranic jest φ, na druhé $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ nulle rovno. Z předpokladu a z rovnice (9) jde totiž, že $\int d\tau \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)$ jest všude nullou, tedy

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ a φ veličinou stálou, která se rovná patrně nulle, je-li φ na povrchu, neb jen v jednom jeho místě nullou.

Odtud jde věta další: Je-li na hranicích prostoru buď φ neb $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ neb na jeděnch místech hranic φ a na druhých $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ *předepsáno*, jest φ v každém bodě prostoru až na bezvýznamnou konstantu určeno. Neboť difference dvou týmž podmínkám hovících řešení: $\varphi_1 - \varphi_2 = \overline{\varphi}$ jest úkonem o dříve uvedených vlastnostech $\Delta\overline{\varphi}=0$ uvnitř a $\overline{\varphi}=0$ neb $\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}=0$ na hranicích prostoru a dle předchozí věty veličinou stálou (potažmo i nullou).

V prostoru prostě souvislém neb není-li cyklosy i v prostoru mnohonásobně souvislém jest tedy pohyb tekutiny jednoznačně určen normálovou rychlostí těles v *hraničných* plochách, která se patrně vždy rovnati musí normálové rychlosti hraničících bodů tekutých $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$. Vznikne-li neb zastaví-li se pohyb hranic (těles), vznikne neb zastaví se současně pohyb tekutiny.

Pohyb tekutiny s jednoznačným potenciálem rychlosti lze tedy z *klidu* vyvoditi, jestliže povrchové body hranic uvedeme v krátko trvající ale velmi rychlý pohyb, tak ale, že se ze svých míst téměř ani nehnuly, nýbrž jen předepsaných okamžitých rychlostí dosáhly.

Tím se udělí tekutině prudký (impulsivný) tlak, jenž se rozšiřuje i do vnitřku jejího. Během vznikání pohybu platí pro každou částici tekutiny rovnice [(3) kap. II.], tedy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X \quad \text{atd.}$$

Značiž nyní τ nad míru krátkou dobu impulsu, během kteréž rychlosti u, v, w vzrostly z nully na konečné předepsané obnosy u, v, w. Pak jest

$$\int_0^\tau dt\,\frac{\partial u}{\partial t} = u\ldots,\quad \int_0^\tau dt\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\ldots\right)=0 \text{ (při limitě } \tau=0),$$

tlak p vzrostl z rovnovážné hodnoty p_1, vyhovující rovnicím $-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_1}{\partial x}=X,\ldots$ na obnos p_1+p_2, kdež p_2 hydrodynamický tlak označuje. Jest tedy:

$$u = -\int_0^\tau \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_2}{\partial x}d\tau = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\tau p_2\,d\tau.$$

Značí-li S accelerující sílu velice značnou ale trvající po krátkou dobu τ, nazývá se $\int_0^\tau S d\tau$ silou momentánní čili impulsivnou, a v témže smyslu nazývá se: $\int_0^\tau p_2 d\tau = \overline{p_2}$ impulsivným tlakem, tak že konečně máme:

$$u = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \overline{p_2}}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \overline{p_2}}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \overline{p_2}}{\partial z}.$$

Pohyb tekutiny vzbuzený impulsem na stěnách prostoru jest tudíž vždy bezvířivý a potenciál vzbuzené rychlosti φ roven $-\frac{1}{\varrho}\overline{p_2}$.

§ 16. ***Hranice tekutiny leží částečně v nekonečnu.*** Substitucí $U = \varphi$, $\Delta\varphi = 0$ přejde (8) v:

$$\varphi(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi}\int d\omega \frac{\partial \varphi}{\partial n}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\int d\omega \frac{\varphi}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}. \qquad (8^a)$$

Integrály vztahují se na povrchy těles v konečnu se nalézajících, jejichž distance a rozměry rovněž konečnými předpokládáme a na plochu ∞, která v nekonečnu tekutinu omezuje; volíme ji kulovitou s centrem v a, b, c a s radiem R. Veličina r značí odlehlost mezi bodem abc a elementem $d\omega$. Hodnota $\varphi(a, b, c)$ jest dle (8^a) složena ze dvou částí φ_1 a φ_2, z nichž jedna od ploch v konečnu a druhá od plochy v nekonečnu pochází. Dokážeme, že, je-li potenciál v nekonečnu konečným, na φ_2 hleděti nemusíme.

V nekonečnu ($r = R$) jest $\frac{\partial r}{\partial n} = -1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, tedy $\varphi_2(a, b, c) = B + \frac{A}{4\pi R}$. Význam veličin A i B jest tento. Výraz: $B = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{d\omega}{r^2}\varphi$ přejde, je-li $d\varepsilon$ elementem tělesného úhlu $\frac{d\omega}{r^2}$, v němž z bodu a, b, c plošný element nekonečně vzdálené koule zříme, ve výraz $B = \frac{1}{4\pi}\int_\infty d\varepsilon\,\varphi$ a repraesentuje, je-li na př. tekutina na *všechny* strany až do nekonečna rozložena, jakousi střední hodnotu potenciálu na kouli nekonečné, ať již jest hodnota ona konečná neb ne. Necháme-li kouli na místě, a změní-li bod a, b, c svou posici o *konečné*, změní se patrně B

percentuálně jen nekonečně málo, a lze je zajisté považovati za *stálou veličinu konečnou*, víme-li, že *jest* φ *v nekonečnu konečným.*

Veličina $A = \int_\infty \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\omega$ označuje „tok“ skrz nekonečnou kouli, to jest $A\,dt$ označuje objem tekutiny, která by jí vyproudila v čase dt.

Podobný význam mají integrály $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\omega$ vzaté přes jednotlivé povrchy v konečnu. Jmenujeme-li po sobě M_1, M_2, tedy plyne z nestlačitelnosti tekutiny $M_1 + M_2 + \ldots = A$. Při konečných M_1*), M_2 redukuje se pak $\varphi_2(a, b, c)$ na B, a φ na $\varphi = \varphi_1 + B$.

B jest konstantou, ustanovíme-li, že φ má býti v nekonečnu konečným a tato supposice jest identická s předpokladem, že φ má ve značných vzdálenostech od těles tvar: $\varphi = -\frac{A}{4\pi r} + B$, kdež A i B jsou konstanty.

Volíme-li totiž bod *abc* v distanci, která jest nad míru značná proti rozměrům a vzájemným distancím těles v konečnu se nalézajících, můžeme se zanedbáním veličin vyššího řádu v (8^a) za jednotlivá r položiti distanci bodu (*abc*) od počátku souřadnic, který leží někde uprostřed těles. Hořejší výsledek lze pak z (8^a) okamžitě odvoditi.

K vůli vyšetření kinetické energie položme kol řečeného počátku souřadnic kouli o značném radiu r_1.

Energie tekutiny odtud až do nekonečna jest dána výrazem

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{4r^2\pi dr\varrho}{2}\left(\frac{A}{4r^2\pi}\right)^2 = \frac{A^2\varrho}{8\pi} \cdot \frac{1}{r_1},$$

kdežto dle (9) energie uvnitř koule jest dána vzorcem

$$\frac{2T}{\varrho} = -\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\omega = -\int (\varphi_1 + B) \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} d\omega,$$

při čemž se integrace vztahuje na povrchy těles a koule o radiu r_1. Se zřetelem na $\int \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} d\omega = 0$ máme též $\frac{2T}{\varrho} = -\int \varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} d\omega$.

---

*) Patrně jest M_1 se zřetelem k tomu, že $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ jest zároveň normálovou rychlostí tělesného bodu na povrchu prvém identické s časovým vzrostem celého objemu tělesného, tedy nullou pro tělesa tuhá. Jde-li o tělesa s proměnlivým objemem, neb o prameny výtokové, které malými plochami vylučujeme z integr. prostoru, jest $M_1 \gtrless 0$.

Jelikož integrál na nekonečné kouli $r = r_1$ jest $\frac{A^2}{16\pi^2}\int\frac{d\omega}{r_1^3} = \frac{A^2}{4\pi r_1}$, bude energie *úhrnná* dána vzorcem:

$$T = -\frac{\varrho}{2}\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,d\omega,$$

při čemž se integrace vztahuje jen na plochy v *konečnu*. Je-li tedy φ_1 neb $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ na nich předepsáno, jest řešení úlohy jednoznačným.

Není-li v tekutině těles vůbec a požaduje-li se, *že u, v, w má býti konečným a spojitým a v nekonečnu zmizeti*, jest $\varphi_1 = 0$, a následkem toho φ *v celém* prostoru rovno stálé *veličině B*.

Existuje-li však v nekonečnu pohyb již a priori, nemůže tu dle předchozího potenciál rychlosti býti konečným. Veličina B rovněž nekonečná se změní při konečném posunutí bodu abc sice o obnos percentuálně malý proti vlastní hodnotě, ale změna ta může býti veličinou téhož řádu jako φ_1, tak že máme $\varphi = \varphi_1 + B$, kdež φ_1 jest členem od pohybu těles v konečnu a proměnlivé B členem od proudění tekutiny v nekonečnu pocházejícím, které o sobě i při $\varphi_1 = 0$, to jest klidu těles existovati může.

Ke konci tohoto paragrafu odvodíme ještě speciálný důsledek z rovnice (8^a), který jest v platnosti, jsou-li u, v, w v integračním prostoru konečné i spojité. Není-li těles vnitřních a redukuje-li se hranice integračního prostoru na kouli o *libovolném radiu* položenou kolem libovolného středu a, b, c, bude skrz $\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\omega = 0$ potenciál ve středu koule roven střední hodnotě potenciálu na povrchu kulovém.

§ **17.** ***Kinetická energie cyklického pohybu.*** Potenciál rychlosti hraje v hydrodynamice úlohu veličiny pomocné; vlastním problémem jest prostorové rozdělení rychlostí a časový jejich průběh. Jde-li o pohyb při potenciálu mnohoznačném, lze cíle dojíti také *jednoznačným* potenciálem, *proměníme-li barrierami prostor mnohonásobně souvislý v prostě souvislý.* Potenciál rychlosti φ v libovolném bodě prostoru *1* jest tu opět definován integrálem:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^1 (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

jenž však není více mnohoznačným, protože integrační cesty jednotlivé prsteny *dokola* obepínající barrierami zamezeny jsou. K vůli větší praecisnosti v definici cyklických konstant chceme jednu stěnu barriery nazvati kladnou, druhou zápornou; obě patří k hranicím prostoru nyní prostě souvislého. Budiž A bodem na záporné, A' protějším bodem na kladné její straně. Integrál:

$$\int_A^{A'} (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

tvořiž pak definici cyklické konstanty k_i, příslušné barrieře i-té. Dle § 11 jest k_i nezávislým na poloze bodové dvojice AA' na téže barrieře.

Je-li φ_A, definované rovnicí:

$$\varphi_A = \varphi_0 + \int_0^A (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

hodnotou potenciálu φ v bodě A, jest hodnota potenciálu v A' větší o integrál AA' čili k_i; neboť integrál od bodu 0 k bodu A' vzatý po *libovolné křivce* dá se v *prostě souvislém prostoru* transformovati na součet integrálů od 0 ku A a od A ku A'.

Jednoznačný potenciál jest tedy úkonem rozpojitým na barrierách a sice jest na kladné straně i-té barriery o obnos k_i větší než v korrespondujícím bodě strany záporné.

Ve všech vývodech následujících myslíme si tekutinu i s tělesy ohraničenu plochou *hlavní* eventuálně v nekonečnu položenou, která se v klidu nalézá. Potenciál φ jest pak hodnotami svými na ostatních hranicích tekutiny, neb hodnotami $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ a cyklickými konstantami k_1 k_2 .. až na konstantu určen. Neboť rozdíl dvou možných řešení φ splňuje uvnitř *Laplace-ovu* rovnici, na hranicích buď podmínku $\bar{\varphi} = 0$, neb $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} = 0$, na barrierách jest spojitým, ostatně konečným i spojitým, tudíž hodnotou stálou.

Úlohu lze dekomposicí pohybu na necyklickou a cyklickou část zjednodušiti. Potenciál úhrnného pohybu, jenž od nynějška písmenem Φ označovati budeme, skládá se z necyklické části φ, která se srovnává s předepsanými podmínkami na povrchu těles a na hlavní ploše pomezné, která na barrierách skoku nedozná, a z čistě cyklické části ψ, která tu dozná předepsané skoky $k_1 k_2$.., ale jejíž $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ jest nullou na tělesech a ploše hlavní.

Kinetická energie tekutiny T jest pak dle (9) určena výrazem:

$$-\frac{2T}{\varrho}=\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\omega,$$

v němž se integrace na hranice prostoru *jednoduše* souvislého, to jest i na *obě* strany každé barriery vztahovati musí. (Označíme to na příště příponou $b+h$). Odtud:

$$-\frac{2T}{\varrho}=\int_{(b+h)} d\omega\,(\varphi+\psi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\psi}{\partial n}\right).$$

Dle rovnice (7^a), v níž $U=\varphi$ a $V=\psi$ položíme, jest

$$\int_{(b+h)} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\omega=\int_{(b+h)} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\omega=0 \qquad (9^a)$$

Druhý integrál v (9^a) jest totiž nullou, předně protože na vlastních hranicích tekutiny jest $\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$ a za druhé, že v integrálu přes barrieru se příspěvky vždy dvou korrespondujících elementů $d\omega$ na kladné a záporné straně ruší. Neboť $d\omega$ a φ jsou na obou stranách stejné, kdežto $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ má hodnoty protivné, protože *normály* vždy do tekutiny čelící, mají směr protivný.

V úvaze, že integrál $\int_b \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\omega$ vzatý přes barriery se také nulle rovná a že $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ jest nullou na ostatních hranicích tekutiny, obdržíme:

$$-\frac{2T}{\varrho}=\int_h d\omega\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\int_b \psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\omega.$$

Značky h a b přísluší integracím *jen* přes vlastní hranice tekutiny, potažmo integracím jen přes barriery.

S dekomposocí lze jíti ještě dále. Budiž ψ_i úkonem vyhovujícím *Laplace-ově* rovnici, jenž na vlastních hranicích tekutiny má $\frac{\partial\psi_i}{\partial n}=0$, jenž *jen* na i-té barrieře dozná skok $\psi_{i(+)}-\psi_{i(-)}=1$ a ostatně jest konečným a spojitým. Pak vyhovuje výraz $\Sigma k_i\psi_i$ týmž podmínkám, které se kladou na potenciál čistě cyklického pohybu a může se od něho lišiti jen konstantou. Položíme-li ji nullou, bude $\psi=\Sigma k_i\psi_i=k_1\psi_1+k_2\psi_2 \ldots +k_n\psi_n$ od sebe již nullou, je-li $k_1=k_2\ldots=0$.

Dvě ψ_i vyhovující týmž podmínkám liší se od sebe opět jen stálou veličinou; neboť rozdíl jejich ψ_i jest úkonem jednoznačným konečným, spojitým i na barrierách, který hoví podmínce $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0$ na hranicích prostoru a $\Delta \psi_i = 0$ ve vnitřku jeho. Odtud jde, že ψ, tudíž i Φ, i když splňuje podmínku, že klidu nullový potenciál Φ náležeti má, ještě jest neurčeným až na konstantu. Přiřadíme li libovolnému bodu 0 určitou avšak libovolnou hodnotu $\Phi = \Phi_0$, bude dle rovnice

$$\Phi - \Phi_0 = \int_0^A (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

při dané poloze *těles a barrier* Φ všude jednoznačně ustanoveno.

Volíme-li barriery jinak, najdeme jiné ψ, které se od předchozího jen veličinou na xyz nezávislou lišiti může, protože obě ψ mají vésti k témuž rozdělení rychlostí.

Za $\int_b \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega$ lze při označení:

$$M_{ii} = -\int_b \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \psi_i\, d\omega, \quad - M_{ij} = \int_b \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \psi_i\, d\omega = \int_b \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \psi_j\, d\omega$$

položiti: $\qquad - (M_{11} k_1^2 + M_{22} k_2^2 + 2 M_{12} k_1 k_2 \ldots)$

Identičnost obou integrálů v M_{ij} jest následkem věty plynoucí ze (7^a), když zavedeme $U = \psi_i$, $V = \psi_j$ a uvážíme podmínku $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = \frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0$ platnou na vlastních hranicích tekutiny.

Se zřetelem k tomu, že ψ_i dozná skok $= 1$ *jen* na *i*-té barrieře, máme

$$M_{ii} = -\int_{bi(+)} \psi_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial n}\right) d\omega - \int_{bi(-)} \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} d\omega = -\int_{bi(+)} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} (\psi_{i(+)} - \psi_{i(-)}) = \int_{bi(-)} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} d\omega$$

Příponami *bi* ($\pm$) označena tu příslušnost integrace ku kladné a záporné straně *i*-té barriery. Podobně jest:

$$M_{ij} = -\int_b \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \psi_j\, d\omega = -\int_{bj(+)} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} d\omega\, (\psi_{j(+)} - \psi_{j(-)}) = \int_{bj(-)} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} d\omega,$$

tedy

$$2\frac{T}{\varrho} = -\int_h \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega + M_{11} k_1^2 + 2 M_{12} k_1 k_2 + M_{22} k_2^2 + \ldots \quad (10)$$

Kinetická energie jest tedy součtem z částí příslušných k pohybu necyklickému a cyklickému; koexistenčního členu není. Čistě cyklická část jest homogenní kvadratickou formou cyklických konstant k s koefficienty, které závisí jen od konfigurace těles hranice tvořících a nikoli od polohy barrier. M_{ii} označuje totiž tok, který posílá parciálný čistě cyklický pohyb ψ_i skrz i-tou barrieru od kladné strany k záporné, a M_{ij} jest tokem téhož původu, ale skrz barrieru j-tou. Při čistě cyklickém pohybu jsou však tělesa v klidu, tok skrz dvě rozličné polohy téže barriery bude skrz inkompressibilitu tekutiny identický a tím koefficienty M od polohy barrier nezávislými.

§ 18. ***Elektromagnetické analogie.*** Uzavřený galvanický proud i probíhající v nekonečně tenkém drátě vzbuzuje dle *Ampèra* tytéž magnetické účinky jako magnetická dvojvrstva proudovodičem položená. Severní magnetismus její musí při tom ležeti na oné straně, kterou máme po levé ruce, jestliže plovenne ve směru proudu dívajíce se do vnitř plochy proudovodičem uzavřené. Magnetický moment dvojvrstvy rovná se intensitě proudu i v absolutní míře *elm.* Magnetické síly od proudu dají se tudíž derivovati z potenciálu, jenž vyhovuje *Laplace-ově* rovnici, v nekonečnu mizí, ale na dvojvrstvě tak rozpojitým jest, že v bodě A na severně magnetické (kladné) straně dvojvrstvy má hodnotu o $4\pi i$ větší nežli v sousedícím bodě A' strany jižně magnetické. Přejdeme-li od A ku A' obloukem proudovodič obepínajícím, klesne potenciál o obnos $4\pi i$, rovný práci sil magnetických. Odmyslíme-li si dvojvrstvu, která má účel magnetické pole učiniti prostě souvislým, stane se pole mnohonásobně souvislým a potenciál *proudu* mnohoznačným s cyklickou konstantou $4\pi i$. Má-li drát *konečnou* tloušťku, rozdělíme jej na nekonečný počet tenkých vláken s proudy infinitesimálně slabými, jichž součet obnáší i. Jelikož čára proudovodič obepínající současně všechna vlákna obepíná, bude práce na ní opět $4\pi i$.

Je-li takových proudovodičů více s proudy i_1, i_2..., jde patrně o potenciál ψ vyhovující Laplace-ově rovnici, mnohoznačný, v nekonečnu mizící, o cyklických konstantách $4\pi i_1$, $4\pi i_2$..., a splňující na povrchu vodičů proudových podmínku $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, jestliže si k vůli analogii hydrodynamické materiál jejich myslíme absolutně nepronikuntelným pro silokřivky

magnetické. Pomocí barrier lze opět magnetické pole proměniti v prostě souvislé a vyjádřiti magnetické síly potenciálem jednoznačným, na barrierách s obnosy $4\pi i_1$, $4\pi i_2$... arciť rozpojitým. *Úloha je tedy naprosto identická s případem čisté cyklosy při klidných hranicích.* Magnetická energie v krychlové jednotce jest při permeabilitě magn. pole $= 1$ (tedy na př. ve vzduchoprázdném prostoru nebo přibližně ve vzduchu) rovna:

$$\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right)\frac{1}{8\pi},$$

tedy energie celého pole T_m dle (10) po substituci $\frac{\varrho}{2} = \frac{1}{8\pi}$, $k_1 = 4\pi i_1$, atd.:

$$\frac{T_m 8\pi}{(4\pi)^2} = i_1^2 M_{11} + i_2^2 M_{22} + 2 i_1 i_2 M_{12} + \dots$$

M_{jj} nazývá se v elektrodynamice koefficientem samoindukce j-tého proudovodiče, M_{jk} koefficientem vzájemné indukce mezi j-tým a k-tým. M_{jk} označuje dle předchozího množství silokřivek magnetických, které proud $i_k = 1$ posílá barrierou j-tého vodiče ve směru od záporné ku kladné straně barriery. Jsou-li proudovodičové tenké dráty průřezu *kruhového*, netřeba stran permeability materiálu jejich činiti hořejší restrikci. Dvojvrstva o momentu i položená *osou* drátu v prsten stočeného vzbuzuje již sama o sobě na povrchu drátu až na veličiny vyššího řádu magnetické silokřivky *tangenciální*, vliv druhých proudů jest nepatrným a podmínka $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ sama od sebe splněna. Systému tuhých prstenů, jichž barrierám v případu čisté cyklosy náleží cyklické konstanty k_1, k_2..., odpovídá tedy v elektrodynamice systém proudovodičů s proudy $i_1 = \frac{k_1}{4\pi}$, $i_2 = \frac{k_2}{4\pi}$ atd., proudovým čarám magnetické silokřivky a kinetické energii magnet. energie.

Analogie sahá ještě dále. Předpokládajíce čistý cyklický pohyb musíme prsteny, aby se hydrodynamickými tlaky do pohybu nedostaly, podrobiti účinku jistých zevnějších sil, kterých by třeba nebylo, kdyby tekutina v klidu se nalézala. Buďtež α, β,... všeobecné souřadnice systému ve smyslu *Lagrange-ově* (viz první paragraf kapitoly V.), $A\delta\alpha + B\delta\beta$... virtuálná práce řečených zevnějších sil, přejde-li systém z jedné do druhé velmi blízké posice, $A_0\delta\alpha + B_0\delta\beta$ práce jiných zevnějších sil, které při *klidu* tekutiny systém těles v rovnováze

udržují (čelíce na příklad tlakům *Archimedickým* atd.). Děje-li se zmíněný přechod neskonale pomalu, tak že systém *těles* nenabude kinetické energie, bude se úhrnná práce zevních sil

$$A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots + A_0\delta\alpha + B_0\delta\beta$$

jeviti ve virtuálném vzrostu potenciálné energie systému δP a ve zvýšení kinetické energie cyklosy K o δK. Není-li cyklosy, tedy tekutina v klidu, jest $A_0\delta\alpha + B_0\delta\beta \ldots = \delta P$, bude tudíž

$$A\delta\alpha + B\delta\beta \ldots = \delta K = \frac{\partial K}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial K}{\partial \beta}\,\delta\beta + \ldots$$

Rovnice odtud plynoucí $A = \frac{\partial K}{\partial \alpha}$, $B = \frac{\partial K}{\partial \beta}$ dovolují vypočísti všeobecné komponenty zevnějších sil, které hydrodynamickým tlakům rovnováhu drží.

Všeobecné komponenty tlaků hydrodynamických jsou patrně $-\frac{\partial K}{\partial \alpha}$, $-\frac{\partial K}{\partial \beta}$ a mají hodnoty kladné, jestliže se K s rostoucím α neb β umenšuje. Jinými slovy řečeno: ***tělesa hledí se tak pohybovati, aby se kinetická energie tekutiny umenšovala.*** Jest to samozřejmé, protože tělesa mohou kinetickou energii nabýti jen na útraty kinetické energie tekutiny. Dle zákonů elektrodynamických jest ponderomotorická akce konstantních proudů, které v prstenech cirkulují s intensitami $i_1 = \frac{k_1}{4\pi}$, $i_2 = \frac{k_2}{4\pi}$, daná výrazem *protivně* stejným, to jest vzorci $+\frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial K}{\partial \beta} \ldots$, kdež K označuje ***magnetickou*** energii systému.

Odtud jde, že na př. dva parallelní kruhové prsteny při protivném znamení cyklických konstant se budou přitahovati, protože antiparallelní galv. proudy se odpuzují.

Plyne to ostatně z přímé úvahy. Jsou-li oba prsteny v každém ohledu identické a cyklické konstanty protivně stejné, tedy se při přiblížení jejich kinetická energie cyklického pohybu umenšuje; neboť při splynutí prstenů v jeden máme cyklický pohyb o cyklické konstantě nulle rovné, jehož kinetická energie jest nulle rovnou. Takové prsteny se budou nutně přitahovati.

O vzájemné akci *dvou* prstenů pojednává ponejprv *Kirchhoff Crelle* 71. Abh. p. 404.

Kapitola IV.

V této kapitole budeme se zabývati výpočtem jednoznačných potenciálů v některých mathematické analyse snáze přístupných případech. V úlohách takového druhu jde vlastně o otázky kinematické, o rozdělení rychlosti při předepsaných podmínkách povrchových, to jest o potenciál rychosti φ.

Známo-li φ jakožto úkon polohy x, y, z, lze najíti rozdělení tlaku, tudíž i síly, jimž od tekutiny podléhají tělesa v ní pohyblivá. Jednodušší a všeobecnější řešení problému poskytuje *W. Thomsonem* ponejprv provedená applikace všeobecných pohybových rovnic *Lagrange-ových*, o níž později řeč bude.

§ 19. ***Pohyb koule v nekonečné tekutině.*** Potenciál rychlosti udaný rovnicí (28) v kap. II. má na povrchu koule $(r = R)$ hodnotu

$$\varphi = -\tfrac{1}{2}\left(u_0(x-a) + v_0(y-b) + w_0(z-c)\right) \tag{1}$$

Normálová rychlost tekutiny na povrchu $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$ rovná se normálové rychlosti sousedícího bodu kulového

$$\frac{1}{R}\left[u_0(x-a) + v_0(y-b) + w_0(z-c)\right];$$

tudíž se nalezne kinetická energie tekutiny dle vzorce (9 kap. III.), což v našem případě dává:

$$\frac{2T}{\varrho} = -\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\omega = \frac{4R^3\pi}{6}\left(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2\right) \tag{2}$$

Integrály při provedení počtu zde se vyskytující jsou tytéž jako v posledním odstavci kapitoly II.

Úhrnná energie systému jest:

$$\left(m + \frac{m'}{2}\right)\frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} \tag{2^a}$$

kdež m hmotu koule, m' hmotu tekutiny jí vytlačenou označuje.

Položíme-li počátek souřadnic do centra kulového ($a = o$, $b = o, c = o$), osu x do směru okamžitého pohybu ($v_0 = w_0 = o$), bude

$$\varphi = -\frac{u_0 R^3 x}{2 r^3} = \frac{u_0 R^3}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3}$$

Výraz (3) připouští tuto interpretaci:

Myslíme-li si kouli vyplněnu hmotou o hustotě rovné jedničce, bude potenciál její Ω v zevnějším bodě týž, jako kdyby celá hmota její $\frac{4R^3\pi}{3}$ byla v centru koule soustředěna. Místo (3) lze pak psáti:

$$\varphi = \frac{3u_0}{8\pi} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{3^a}$$

§ 20. ***Pohyb ellipsoidu ve směru jedné hlavní osy v nekonečné tekutině.*** Nabízí se otázka, zda-li rovnice (3^a) nemá všeobecnější platnosti.

Budiž tedy Ω podobným potenciálem hmoty vyplňující prostor zaujatý tuhým tělesem, kteréžto těleso má okamžitě postupnou rychlost u_0 ve směru osy x-ové. Může $\varphi = \frac{\partial \Omega}{\partial x} . K$, kdež K jest konstantou, býti potenciálem rychlosti v tekutině těleso obklopující?

Laplace-ově rovnici $\Delta\varphi = 0$ jest vyhověno, protože v zevnějších bodech jest $\Delta\Omega = 0$; rovněž konverguje φ i s prvými jeho diff. kvocienty v nekonečnu k nulle, tak že předpokládaný tu klid tekutiny jest vzorcem pro φ zabezpečen. Na povrchu tělesa jest rychlost jeho ve směru normály do tekutiny vedoucí $u_0 \cos nx$ a rychlost tekutiny $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Zbývá tedy vyšetřiti, zda-li a kdy jest zde splněna nezbytná podmínka

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_0 \cos nx \tag{4}$$

Patrně jest:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = K\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \cos nx + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \cos ny + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} \cos nz\right) \tag{5}$$

To, co potřebujeme, jest hodnota uzávorkovaného výrazu těsně nad povrchem tělesa, to jest v tekutině.

Jak z theorie potenciálu známo, jest Ω jakož i $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ úkonem konečným a spojitým i při překročení povrchu, jenž hmotu v sobě uzavírá. Druhé derivace $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \ldots$ jsou však rozpojité a následkem toho i: $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$. Mezi hodnotami této veličiny těsně pod povrchem tělesa: $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_i$, a těsně nad ním: $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_e$, panuje rozdíl, jejž snadno ustanoviti jest.

Uvnitř tělesa označme koordinaty plynulého bodu písmenkami ξ, η, ζ, za element prostoru $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ pišme $d\tau$; konečně značiž $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ distanci plynulého bodu ξ, η, ζ od zevnějšího bodu x, y, z. Patrně jest:

$$\Omega = \int d\tau \, . \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \int d\tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\int d\tau \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Prostorem integračním jest tu těleso.

Pomocí *Greenovy* methody (integrovati per partes) bude, (viz 6ª kap. III.) $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\int \frac{\cos nx \, . \, d\omega}{r}$; $d\omega$ jest elementem povrchu a n směr normály, vedoucí ven z integračního prostoru, to jest do tekutiny. Jest tedy $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ současně potenciálem hmoty, po povrchu rozestřené s hustotou $(-\cos nx)$.*)

Dle nauky o potenciálu bude:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_e - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_i = -4\pi\,(-\cos nx) \qquad (6)$$

Rovnice (4) přejde tím v:

$$K\left(\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_i + 4\pi \cos nx\right) = u_0 \cos nx \qquad (7)$$

---

*) Totéž nalezneme pro $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, nachází-li se bod x, y, z uvnitř. Plošnou integraci nutno tu vztáhnouti též na povrch nekonečně malé koule, jíž z prostoru integračního bod x, y, z proto vylučujeme, jelikož se v něm $1/r$ nekonečně velikým stává. Snadno se přesvědčíme, že tento integrál konverguje k nulle.

a bude pro každý bod povrchu jen tehdy splněna, jestliže se:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_i = \cos nx \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_i + \cos ny \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\right)_i + \cos nz \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z}\right)_i \tag{7^a}$$

redukuje na součin z konstanty a $\cos nx$, což vyžaduje

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \text{stálé}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} = 0.$$

Této podmínce jest vyhověno, má-li těleso tvar ellipsoidu, jehož potenciál Ω_i ve vnitřních bodech jest:

$$\Omega_i = \Omega_o - \frac{Ax^2}{2} - \frac{By^2}{2} - \frac{Cz^2}{2} \tag{7^b}$$

kdež:

$$A = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) f(\lambda)}, \quad B = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda) f(\lambda)},$$

$$C = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda) f(\lambda)} \tag{7^c}$$

a Ω_o jistou stálou veličinu označuje; a, b, c jsou poloosy ellipsy, a $f(\lambda) = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$; (osy souřadnic položeny tu do os ellipsoidu).

Odtud máme, berouce zřetel na (7^a), (7^b) místo rovnice (7):

$$K(4\pi - A) = u_o$$

a pro potenciál rychlosti výraz:

$$\varphi = \frac{u_o}{4\pi - A} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{8}$$

Pro zevnější body jest:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -2\pi abcx \int_\mu^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) f(\lambda)}, \tag{9}$$

kdež μ značí *kladný* kořen rovnice:

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \tag{10}$$

(Stran odvození viz na př. K. Časop. jednoty 1894 neb Seydler II.)

Kinetickou energii tekutiny najdeme dle vzorce (9. kap. III.).

Zde jest $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_o \cos nx$; pro povrch ellipsoidu bude dle

(10) $\mu = 0$, dle (9) $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = - Ax$, tedy se zřetelem na (8)

$$\frac{2T}{\varrho} = \frac{u_0^2 A}{4\pi - A} \int d\omega \cos nx\, x,$$

kdež x souřadnici, $d\omega$ plošný element povrchu ellipsoidického a n normálu do tekutiny čelící označuje. Integrál v poslední rovnici jest patrně roven objemu ellipsoidu, tedy:

$$\frac{2T}{\varrho} = \frac{u_0^2 A}{4\pi - A} \cdot \frac{4\pi abc}{3} \tag{11}$$

Integrály v A, B, C jsou elliptické, dají se však v speciálných případech snadno redukovati, na př. pro kouli $a = b = c$, rotační ellipsoid $b = c$, při čemž nutno rozeznávati případy $a > c$ (podlouhlý vejčitý ellipsoid) a $a < c$ (splоštěný ellipsoid). Ještě speciálnější formy jsou válec tenký (c velmi malé proti a) a deska (a velmi malé proti c).*)

§ 21. ***Pohyb tekutiny kolem klidného ellipsoidu.*** Tekutina proudiž v nekonečnu se stálou rychlostí u_0, na př. ve směru záporné osy x-ové; souřadnicové osy buďtež v osách *klidného* ellipsoidu. Případ tento obdržíme z předchozího, udělíme-li celému systému rychlost $- u_0$, zvětšíme-li tedy potenciál o $- u_0 x$, tak že jest:

$$\varphi = u_0 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{1}{4\pi - A} - x \right) \tag{12}$$

§ 22. ***Čáry proudové.*** Známe-li okamžitou rozlohu ploch stejného potenciálu, najdeme také směry proudových křivek,

---

*) Pro $b = c$, $c > a$ máme při označení $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2$

$$A = \frac{4\pi (1 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^3} (\varepsilon - arc\, tg\, \varepsilon); \quad B = C = \frac{2\pi (1 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^3} \left(arc\, tg\, \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right); \tag{11a}$$

pro $b = c$, $c < a$ a $\varepsilon_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$

$$A = \frac{4\pi (1 - \varepsilon_1^2)}{\varepsilon_1^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} - \varepsilon_1 \right);$$

$$B = C = \frac{2\pi}{\varepsilon_1^3} (1 - \varepsilon_1^2) \left(\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \right). \tag{11b}$$

Hodnoty odpovídající kouli ($\varepsilon = 0$) nalezneme, rozvinouce $arc\, tg\, \varepsilon$ v řadu $\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{5} \ldots$ Vyjde $A = B = C = \frac{4\pi}{3}$.

orthogonálných jejich trajektorií. Jde-li speciálně o rotační těleso, které postupuje směrem osy rotační, (zároveň osy x-ové), bude, jestliže píšeme $\sigma = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\varphi = \varphi(\sigma, x)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} \cdot \frac{y}{\sigma}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} \cdot \frac{y^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\frac{y^2}{\sigma^3},$$

podobně $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ a

$$\Delta\varphi = 0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma} \tag{13}$$

Proudové křivky jsou zde v meridianových rovinách rotačního tělesa obsaženy a rovnice jejich mají tvar

$$U(x, \sigma) = C, \tag{14}$$

kdež C jest veličinou pro *touž* proudovou křivku stálou, ale od křivky ku křivce rozdílnou.

Z orthogonálnosti křivek stejného φ a U jde:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = 0 \tag{15}$$

Má-li φ tvar $\varphi = \frac{\partial W}{\partial x}$ a vyhovuje-li W (jak tomu u ellipsoidu jest) *Laplace-ově* rovnici:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial W}{d\sigma} = 0 \tag{16}$$

bude místo (15):

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial\sigma} = 0$$

neb pomocí (16)

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial W}{d\sigma}\right)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial\sigma}}{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial W}{\partial\sigma}\right)}.$$

Odtud jde, že *forma* $U(x, \sigma)$ se liší od formy $\sigma\frac{\partial W}{\partial\sigma}$ jen o stálý faktor; bude tedy rovnicí proudových křivek:

$$\sigma\frac{\partial W}{\partial\sigma} = const \tag{17}$$

Jde-li na př. o rotační ellipsoid, jenž postupuje rychlostí u_0 směrem osy x-ové, jest dle (8)

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_0}{4\pi - A}\,\Omega\right) = \frac{\partial W}{\partial x},$$

může se tedy W od $\frac{u_0}{4\pi - A}\,\Omega$ lišiti o veličinu jedině na σ závislou $\psi(\sigma)$, která však *Laplace-ově* rovnici (16) vyhověti musí, protože jí W vyhovovati má a Ω již vyhovuje. Z (16) jde $\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{d\psi}{d\sigma} = 0$, neb $\frac{d\psi}{d\sigma}\,.\,\sigma = K_1$ a $\psi = K_1 \log \sigma + K_2$. Na rotační ose ($\sigma = 0$) nemá však ψ býti nekonečným, jest tudíž $K_1 = 0$ a $W = \frac{u_0}{4\pi - A}\,\Omega + K_2$, a následkem toho bude dle (17) rovnicí proudokřivek:

$$\sigma\,.\,\frac{u_0}{4\pi - A}\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = const \tag{18}$$

Nullové hodnotě konstanty na pravé straně v (18) odpovídají proudokřivky buď: $\sigma = 0$ aneb: $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0$. Prvá repraesentuje rotační osu vedoucí k ellipsoidu a na druhé straně se od ní vzdalující, druhá není možnou, protože neexistuje kolem ellipsoidu hmotou stejnoměrně vyplněného souvislá křivka, na níž by síla měla *jen* směr osy rotační $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0,\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \gtrless 0\right)$.

Od nulle rozdílným hodnotám konstanty odpovídají proudokřivky běžící od jednoho místa ellipsoidu k druhému, tekutina ellipsoidem v před hozená vrací se totiž zpět obloukem na místa jím opuštěná. Jde-li speciálně o kouli, kde

$$\Omega = \frac{4R^3\pi}{3r} = \frac{4R^3\pi}{3\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}},$$

máme místo (18) $\sigma^2 = r^3\,const$ neb po zavedení polárných souřadnic r a ψ, kdež $\sigma = r \sin \psi$,

$$r = K\,.\,\sin^2 \psi \tag{19}$$

Výsledek lze snadno interpretovati.

Jde-li o *klidný* ellipsoid v *tekutině* proudící, bude dle (12)

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial x} = u_0\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,\frac{1}{4\pi - A} - x\right)$$

odtud: $W = u_0 \left(\Omega \frac{1}{4\pi - A} - \frac{x^2}{2} + \psi(\sigma) \right)$ a se zřetelem na (16)

a na $\Delta\Omega = 0$: $\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\sigma} - 1 = 0,$

pak $\sigma \frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{\sigma^2}{2} + K,$ a $\psi = K \log \sigma + K_1 + \frac{\sigma^2}{4},$

kdež $K = 0$ položiti jest, aby ψ nebylo na ose: $\sigma = 0$ nekonečně velikým.

Rovnicí proudokřivek bude tudíž dle (17):

$$\sigma \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{4\pi - A} + \frac{\sigma}{2} \right) = const.$$

Proudokřivce $const = 0$ odpovídá buď $\sigma = 0$ neb

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{4\pi - A} + \frac{\sigma}{2} = 0, \qquad (20)$$

$\sigma = 0$ jest rovnicí osy rotační; druhá rovnice jest, jak dokážeme, splněna na meridiánovém řezu ellipsoidu.

Substitucí $\sigma^2 = y^2 + z^2$ přejde (7^b) v $\Omega_i = \Omega_0 - \frac{A}{2} x^2 - \frac{C}{2} \sigma^2$.

Hodnota výrazu $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}$ těsně pod povrchem a skrz kontinuitu jeho též těsně nad povrchem bude $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = -C\sigma$, tedy na povrchu ellipsoidu:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{4\pi - A} + \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{2C}{4\pi - A} \right),$$

což po dosazení hodnot za C a A z (11^a) neb (11^b) dává skutečně nullu.

Pohyb tekutiny jest zde patrně ustálený a následkem toho jsou proudokřivky zároveň trajektoriemi materiálných částic. Tekutina obsažená v nekonečně tenkém válci, jehož osou jest osa rotační, dojde ellipsoidu, rozejde se v proudokřivkách po něm na všechny strany, oběhne jej *celý* a spojí se opět v druhém osovém bodu.

Takové pohyby jsou mathematicky *možné*, ale v skutečnosti nedají se realisovati. Tekutina dosáhši nejvyšší bod opouští ellipsoid a běží v *jiném* směru dále, takže za ellipsoidem vznikne prostor s *tekutinou* klidnou či mrtvou. Problémy *tohoto* druhu, k nimž se ještě vrátíme, dají se jen v řídkých případech řešiti.

Nejnápadněji jeví se rozdíl *skutečného rozpojitého* a před tím studovaného dokonale *spojitého* pohybu ve výsledném tlaku tekutiny na ellipsoid. V případě prvém hledí tekutina jej poháněti ve směru vlastního pohybu, v případě druhém se tlaky zruší.

Potenciál na povrchu ($\mu = 0$) jest totiž dle (9) a (12):

$$\varphi = - u_0 x \left(\frac{A}{4\pi - A} + 1 \right),$$

má pro $\pm x$ hodnoty stejné a protivné a jelikož i svah ellipsoidu k ose jest v týchže místech stejným, bude i $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ čili diff. kvocient dle meridiánového řezu čili výsledná rychlost stejnou a dle r. (20) v kap. II. bude i tlak stejný v symmetricky položených místech $\pm x$, tedy výslednice tlaků nullou.

§ 23. ***Ellipsoid se točí.*** Děje-li se točení kolem hlavní osy z rychlostí jedničce rovnou, má povrchový bod ellipsoidu x, y, z rychlost o osových komponentách: $-y$, $+x$, 0. Normálovou komponentou jest $x \cos ny - y \cos nx$ a této musí se rovnati normálová rychlost tekutiny $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Supponujme:

$$\varphi = C' \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right).$$

Jelikož jest

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial x}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial x}{\partial z} \cos nz = \cos nx,$$

a podobně $\frac{\partial y}{\partial n} = \cos ny$, bude

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = C' \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos ny \right] + C' \left[x \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) - y \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \right].$$

Differenciálné kvocienty úkonu Ω vztahují se vesměs k bodům na *zevní* straně ellipsoidu položeným. Ty, které jsou uvnitř prvé závorky hranaté, jsou vesměs spojitými úkony a lze místo $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ a $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ položiti hodnoty $-Ax$, $-By$, náležející bodům těsně pod povrchem ellipsoidu. Dle rovnice (6) jest

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_e = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_i + 4\pi \cos nx = (4\pi - A) \cos nx,$$

podobně $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_e = (4\pi - B)\cos ny,$

tudíž $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = (x\cos ny - y\cos nx) = C'[Ax\cos ny - By\cos nx]$

$+ C'[(4\pi - B)\,x\cos ny - (4\pi - A)\,y\cos nx].$

Na povrchu ellipsoidu jest $\frac{\cos nx}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\cos ny}{\frac{y}{b^2}}.$

Odtud jde:

$$\frac{xy}{b^2}\left(\frac{1}{C'} - A - 4\pi + B\right) = \frac{xy}{a^2}\left(\frac{1}{C'} - B - 4\pi + A\right),$$

neb:
$$C' = \frac{a^2 - b^2}{a^2(A + 4\pi - B) - b^2(B + 4\pi - A)} \tag{21}$$

Kinetickou energii nalezneme ze vzorce:

$$\frac{2T}{\varrho} = -\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega = C'\int d\omega\,(x\cos ny - y\cos nx)\,yx\,(B - A).$$

Neboť na povrchu jest

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -xA,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -yB.$$

Je-li $d\tau$ objemovým elementem prostoru ellipsoidického, jest dle *Greenovy* integr. methody (6^a, III.)

$$\int d\tau\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2x)\right] = \int(x^2y\cos ny - y^2x\cos nx)\,d\omega,$$

označuje-li n normálu ven z ellipsoidu tedy do tekutiny čelící a výraz ten rovná se patrně:

$$\int d\tau\,(x^2 - y^2) = \int d\tau\,[\overline{x^2 + z^2} - \overline{y^2 + z^2}] = S_y - S_x,$$

kdež S_y a S_x jsou momenty setrvačnosti ellipsoidu se zřetelem na osy y a x, je-li hustota v něm rovnou jedničce. Tím bude při rotační rychlosti rovné r'

$$\frac{2T}{\varrho} = C'(A - B)(S_x - S_y)\,r'^2 \tag{22}$$

(Přejde-li totiž rotační rychlost z jedničky na r', přistoupí ku φ a $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ faktor r'.)

§ 24. ***Výraz pro potenciál a kinetickou energii libovolného tuhého tělesa, které se samojediné nalézá v tekutině do nekonečna jdoucí a zde klidné.*** Jsou-li u, v, w, p, q, r okamžité postupové, potažmo angulárné rychlosti tělesa příslušné souřadnicovým osám x, y, z s tělesem pevně spojeným, bude v povrchovém bodě x, y, z rychlost tekutiny i tělesa ve směru normály dána vzorcem:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \cos nx\,(u - ry + qz)$$
$$+ \cos ny\,(v - pz + rx) + \cos nz\,(w - qx + py) \qquad (21^a)$$

Značtež nyní φ_1, φ_2, φ_3 potenciály rychlosti, kdyby těleso *bez rotace* postupovalo buď *jen* dle osy x-ové neb jen y-ové neb z s rychlostí $= 1$; φ_4, φ_5, φ_6 odpovídejtež prostým rotacím $= 1$ buď jen kol osy x, neb jen osy y neb jen z. Kterékoli φ musí splňovati rovnici *Laplace-ovu* a v nekonečnu mizeti.

Na povrchu tělesa bude dle ustanovení při:

$$u = 1,\ v = w = p = q = r = 0,\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos nx,$$
$$v = 1,\ u = w = p = q = r = 0,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos ny,$$

podobně $\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos nz \ldots$ Dále bude při:

$$u = v = w = q = r = 0 \quad \text{a} \quad p = 1 \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y \cos nz - z \cos ny$$

a podobně

$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z \cos nx - x \cos nz,\quad \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x \,.\, \cos ny - y \cos nx.$$

Jde-li na př. o ellipsoid, jest:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\cdot\frac{1}{4\pi - A},\quad \varphi_2 = \frac{\partial\Omega}{\partial y}\cdot\frac{1}{4\pi - B},\quad \varphi_3 = \frac{\partial\Omega}{\partial z}\cdot\frac{1}{4\pi - C},$$
$$\varphi_4 = A'\left(y\frac{\partial\Omega}{\partial z} - z\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right),\quad \varphi_5 = B'\left(z\frac{\partial\Omega}{\partial x} - x\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right),$$
$$\varphi_6 = C'\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right).$$

Konstanty A', B' se najdou cyklickou přeměnou z hodnoty C' v rovnici (21). Jsou-li tedy známy úkony $\varphi_1 \ldots \varphi_6$, bude v případu, kdy těleso *současně* dle tří os postupuje

rychlostmi u, v, w a se kol nich točí ang. rychlostmi p, q, r, hodnota potenciálu dána vzorcem:

$$\varphi = \varphi_1 u + \varphi_2 v + \varphi_3 w + \varphi_4 p + \varphi_5 q + \varphi_6 w.$$

Neboť φ splňuje Laplace-ovu rovnici a mizí v nekonečnu, protože tak činí jednotlivé summandy jeho; že splňuje podmínku povrchovou (21[a]), přesvědčíme se substitucí.

Odtud jde dále, že kinetická energie tekutiny jest homogenní kvadratickou funkcí veličin u, v, w, p, q, r s koefficienty stálými a patrně na absolutní poloze tělesa v tekutině nezávislými. Ze vzorce:

$$-\frac{2T}{\varrho} = +\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,.\,\varphi d\omega = \int \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} u + .. \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} r\right)(\varphi_1 u + \varphi_2 v + .. \varphi_6 r)\, d\omega$$

$$= \int [(u - ry + qz) \cos nx + ..] (\varphi_1 u + .. + \varphi_6 r)\, d\omega$$

lze koefficienty ty snadno nalézti.

Tak na př. jest faktor u u^2 roven $\int \varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} d\omega$, u r^2 roven $\int \varphi_6 \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} d\omega$; onen u uv jest $\int \left(\varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right) d\omega$ a redukuje se na $2\int \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} d\omega$, protože dle theoremu (7[a]. III.) jest

$$\int \varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} d\omega = \int \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} d\omega.$$

Kinetická energie *tělesa* samého jest podobným úkonem. Lze tedy říci, že *úhrnná* energie systému jest homogenní kvadratickou funkcí argumentů u, v, w, p, q, r s koefficienty stálými a na absolutní poloze tělesa v prostoru nezávislými. V jednotlivých případech lze výraz pro T zjednodušiti.

a) Je-li na př. těleso i co do formy i co do rozdělení hmoty symmetrické k rovině xz, vypadnou z výrazu T faktory při (uv, wv), (up, wr), (ur, wp), (qv), (qr, qp). Lze to dokázati, představíme-li si ze šesti rychlostí u, v . . ., r vždy jen ty *dvě* od nully rozdílnými, jichž koeff. se nulle rovnati má. Doporučuje se při tom, všímati si rychlosti, kterou má libovolný bod tělesa A, obsažený v rovině symmetrie xz.

Je-li na př. $\frac{u}{v} \gtrless 0$, jest rychlost jeho při u, v a $u\,(-v)$ symmetricky stejná a kinetická energie totožná. Totéž platí při $w\,(v)$ a $w\,(-v)$. Příslušné faktory ve výrazu T pak vypadnou.

Je-li $\frac{u}{p} \gtrless 0$, má A od u rychlost dle osy x-ové v rovině xz, a kolmo k ní rychlost od rotace p, která přejde v symmetrickou, přejde-li p v $(-p)$. Energie kinetická jest v obou případech opět tatáž, vypadne tudíž faktor při up, a z téhož důvodu při wr. Je-li $\frac{u}{r} \gtrless 0$ neb $\frac{w}{p} \gtrless 0$, vede se důkaz podobně. Je-li $\frac{q}{v} \gtrless 0$, má A od rotace q rychlost v rovině xz, k níž jest postupný pohyb $+v$ a $-v$ symmetrickým. Je-li $q \gtrless 0$, a mimo něj $r \gtrless 0$, má A následkem q opět rychlost v rovině xz, následkem rotace r rychlost k ní kolmou a při záporném r protivně (symmetricky) stejnou.

b) Je-li těleso co do formy i rozdělení hmoty symmetrické také k rovině yx, vypadnou koefficienty při (vw, uw), (vq, up), (vp, uq), (rw), (rp, rq). Výraz T obsahuje pak mimo šest kvadrátů $u^2 \ldots r^2$ jen ještě součiny wq, vr, které také vypadnou, je-li i yz rovinou symmetrie.

c) U jistých tvarů tělesných setkáváme se *s dvěma páry* k sobě kolmých rovin symmetrie se společnou osou průsekovou (osou x-ovou). Tak na př. jsou u hranolu s kvadratickou základnou rovinami symmetrie netoliko dvě k sobě kolmé roviny skrz osu hranolu rovnoběžně položené k bočním jeho stěnám (roviny xz, xy), nýbrž jsou jimi i obě roviny diagonálové (xz', xy'). Obyčejná rotační tělesa mají patrně touž vlastnost. Náleží-li w', v', r', q' *diagon. osám* y', z', smí se ve výrazu pro kinetickou energii T mimo kvadráty $u'^2 \ldots r'^2$ vyskytovati jen členy $v'r'$, $q'w'$. Dosadíme-li do výrazu pro T, jenž vyjádřen jsa veličinami $u \ldots r$ mimo kvadráty jen součiny wq, vr obsahuje, hodnoty:

$$v = v' \cos \varphi' - w' \sin \varphi', \qquad w = v' \sin \varphi' + w' \cos \varphi', \qquad u = u'$$
$$q = q' \cos \varphi' - r' \sin \varphi' \qquad r = q' \sin \varphi' + r' \cos \varphi' \qquad p = p'$$

(kdež φ' označuje úhel mezi oběma osami yy'), najdeme, že dvojnásobná kinetická energie systému se musí redukovati na tvar

$$2T = a_{11}u^2 + a_{22}(v^2 + w^2) + a_{33}p^2 + a_{44}(q^2 + r^2) + b(wq - vr) \qquad (23^a)$$

Člen $b(wq - vr)$ lze ještě odstraniti vhodnou volbou počátku souřadnicového na ose x-ové (osy y, z rovnoběžnými ponechávajíc). Určitý bod na ní položený o souřadnici x v systému původním a $x' = x - \beta$ v systému novém má parallelně k ose y-ové neb ose y' rychlost $v + rx$, kterou lze též vyjádřiti výrazem $v' + r'x'$ neb $v' + r'(x - \beta)$, když v', r' náleží systému

novému. Podobně máme pro rychlost jeho dle osy z jednak $w - qx$, jinak $w' - q'(x' - \beta)$. Odtud jde $v = v' - \beta r'$, $w = w' + \beta q'$, $r = r'$, $q = q'$. Dosadíme-li. kladouce ještě $p = p'$, $u = u'$, do (23^a), můžeme volbou veličiny 2β dle podmínky $2a_{22}\beta + b = 0$ spůsobiti, že se ve $2T$, nyní vyjádřeném veličinami $u'\,v'\,w'\,p'\,q'\,r'$, vyskytují jen samé kvadráty.

Lze tedy *vhodnou volbou souřadnicového* počátku na ose x-ové uvésti $2T$ na tvar

$$2T = a_{11}u^2 + a_{22}(v^2 + w^2) + a_{33}p^2 + a_{44}(q^2 + r^2) \qquad (23)$$

d) Jiná tělesa nemají sice rovin symmetrie, jsou však obdařená *osou* symmetrie té vlastnosti, že těleso samo se sebou koinciduje po otočení o n-tou *část z 360⁰*. Je-li na př. osa z dvojčetnou osou symmetrie, koinciduje-li tedy těleso samo se sebou po otočení o *180⁰* (šroub lodní), jsou koefficienty v T identickými v systémech (z, $+x$, $+y$) a (z, $x' = -x$, $y' = -y$). Poněvadž *týž* daný pohyb se vypisuje v systému z, x', y' komponentami $u' = -u$, $v' = -v$, $p' = -p$, $q' = -q$ a pro T stejná hodnota numerická vyjíti musí, ať jeden neb druhý systém souřadnicový výpočtu za základ položíme, mohou se v T jen takové členy vyskytovati, které se nemění, jestliže za u, v, p, q položíme hodnoty protivné. Tím bude:

$$2T = A_1u^2 + A_2v^2 + A_3w^2 + B_1p^2 + B_2q^2 + B_3r^2$$
$$+ Euv + Fup + Guq + Jvp + Kvq + Mpq + Lwr.$$

Je-li osa z čtyrčetnou osou symmetrie, to jest, splývá-li těleso samo se sebou po otočení o *90⁰*, najdeme podobnou úvahou

$$2T = A_1(u^2 + v^2) + A_3w^2 + B_1(p^2 + q^2)$$
$$+ B_3r^2 + F(up + vq) + G(uq - vp) + Lwr.$$

§ 25. ***Potenciál rychlosti a kinetická energie v přítomnosti několika těles tuhých 1, 2...*** Je-li φ_i, $i = 1, 2\ldots$ potenciál rychlosti, jenž se srovnává s předepsaným pohybem na povrchu tělesa i-tého a s klidem na ostatních a jenž v nekonečnu mizí, když tekutina eventuálně až tam sahá a v klidu se nalézá, bude $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ úplným řešením. Patrně bude lineárným úkonem rychlostí $p_1q_1r_1u_1v_1w_1$, $p_2q_2r_2u_2v_2w_2\ldots$, jež se vztahují k souřadnicovým osám s jednotlivými tělesy pevně spojeným, a jelikož řečené i o $\partial\varphi/\partial n$ v platnosti jest, bude *kinetická energie tekutiny tudíž i celého systému homogenní kvadratickou funkcí veličin právě uvedených.*

Kapitola V.

§ 26. ***Všeobecné souřadnice Lagrange-ovy.*** Předpokládejme, že se okamžitý tvar a konfigurace těles v tekutině obsažených dá jednoznačně ustanoviti jistými jen na čase *závislými* veličinami α, β, γ . . .; zoveme je koordinatami všeobecnými. Jde-li na př. o těleso tuhé, můžeme jeho těžištěm položiti souřadnicový systém, jehož osy koincidující s hlavními osami setrvačnosti. Veličinami α, β, γ . . . jsou zde obyčejné souřadnice těžiště vůči systému v prostoru *pevnému* a tři úhly ψ, χ, ω ustanovující angulárné posice hlavních os setrvačnosti. Souvisí-li v jiném příkladě *dvě* tělesa mezi sebou trvale v témže bodu A, jde-li na př. o dva kužele, jejichž vrcholy dokonalým kloubem spojeny jsou, lze v každém z nich si mysliti tři s ním pevně spojené osy se společným počátkem v A. Úhly χ_1, ψ_1, ω_1, χ_2, ψ_2, ω_2, jakož i souřadnice bodu A ustanovují jednoznačně polohu systému. U těles pružných může se měniti i tvar jejich; tak na př. může, jde-li o *malé* úchylky z původní polohy, vzniknouti nový tvar těles superposicí celé řady jednotlivých deformací, z nichž každá určitým parametrem α neb β . . . jednoznačně ustanovena jest. Tímto spůsobem můžeme libovolnou deformaci struny složiti dle *Fourier-ova* theoremu ze sinusových křivek, z nichž každá velikostí amplitudy α, β, . . . karakterisována jest.

Po stránce ryze geometrické jsou všeobecné souřadnice na sobě nezávislými elementy ve výpisu okamžitých geometrických vlastností systému a z téhož důvodu jsou i jejich variace na sobě nezávislé. Po stránce kinematické jsou explicitními úkony času.

Souřadnice x, y, z libovolné částice *těles* o hmotě m buďtež, jak blíže ustanovujeme, na čase jen potud závislými, pokud jimi jsou veličiny α, β, γ. Mimo to mohou xyz záviseti na jistých

časem se neřídících veličinách, které tuto určitou částici vůči ostatním individualisují. Odtud jde:*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = u = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\dot{\beta} + \ldots \\ v = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\dot{\beta} + \ldots \\ w = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\dot{\beta} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Z rovnice (1) vychází, že kinetická energie těles $T_0 = \Sigma \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ jest homogenní kvadratickou funkcí tak zvaných *„všeobecných komponent rychlostí“*: $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ s koefficienty, které jen na α, β, γ.. záviseti mohou. Normálová komponenta rychlosti na povrchu těles: $\dot{n} = u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz$ jest homogenní lineárnou funkcí jejich o tvaru $\dot{n} = a\dot{\alpha} + b\dot{\beta} + c\dot{\gamma} \ldots$ Panuje-li v tekutině tělesa obklopující *jednoznačný* potenciál φ, musí na povrchu těles býti:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \dot{n} = a\dot{\alpha} + b\dot{\beta} + c\dot{\gamma} + \ldots \quad (2)$$

Dekomposicí lze φ uvésti na tvar:

$$\varphi = \varphi_1 \dot{\alpha} + \varphi_2 \dot{\beta} + \varphi_3 \dot{\gamma} + \ldots \quad (3)$$

Při tom jsou $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ úkony vyhovující *Laplace-ově* rovnici, jež na povrchu těles splňují podmínky $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = a$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = b$ atd.

Veličiny

$$a = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\cos nx + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\cos ny + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\cos nz$$

$$b = \frac{\partial x}{\partial \beta}\cos nx + \frac{\partial y}{\partial \beta}\cos ny + \frac{\partial z}{\partial \beta}\cos nz$$

jsou opět úkony argumentů α, β, γ a veličin, které určitý bod povrchový individualisují. Kinetická energie tekutiny

$$\Theta = -\frac{1}{2\varrho}\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega$$

*) Zavádíme zde k vůli pohodlí *Newtonovo* označení

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} \ldots \frac{du}{dt} = \dot{u}, \ldots$$

jest následkem rovn. (2), (3) homogenní kvadratickou funkcí argumentů $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$.. s koefficienty jen na α, β, γ závislými a týž výrok platí o úhrnné kinetické energii $T_0 + \Theta$ celého systému. Komponenty virtuálného posunutí tělesového bodu x, y, z jsou:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}\,\delta\beta + \dots \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \alpha}\,.\,\delta\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta}\,\delta\beta + \dots \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta}\,\delta\beta + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Virtuálné posunutí povrchového bodu těles ve směru normály jest $\delta n = \delta x \cos nx + \delta y \cos ny + \delta z \cos nz$ neb

$$\delta n = \delta\alpha\,.\,a + \delta\beta\,.\,b + \dots = \delta\alpha\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \delta\beta\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \dots \tag{5}$$

§ 27. ***Transformace jistých výrazů.*** V *d'Alembertově* principu, o němž níže bude řeč, vyskytuje se výraz

$$J = \Sigma m\left(\frac{du}{dt}\,\delta x + \frac{dv}{dt}\,\delta y + \frac{dw}{dz}\,\delta z\right);$$

součet vztahujeme v něm na hmotné body *těles*.

Pomocí rovnic (4) lze J uvésti na tvar $A_0\delta\alpha + B_0\delta\beta + \dots$ Při tom jest:

$$A_0 = \Sigma m\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) = \frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(u\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} + v\,\frac{\partial y}{\partial \alpha} + w\,\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)$$
$$- \Sigma m\left(u\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) + v\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) + w\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\right).$$

Z rovnic (1) jde:

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial x}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial v}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial y}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial w}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \tag{5^a}$$

tedy:

$$\Sigma m\left(u\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} + v\,\frac{\partial y}{\partial \alpha} + w\,\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) = \Sigma\,\frac{m}{2}\,\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}}\,(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\alpha}}.$$

Za druhé jest:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \alpha} = \Sigma m\left(u\,\frac{\partial u}{\partial \alpha} + v\,\frac{\partial v}{\partial \alpha} + w\,\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right),$$

tedy se zřetelem na (1):

$$\frac{\partial T_0}{\partial \alpha} = \Sigma m\left(u\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}\dot{\alpha} + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}\dot{\beta} + \ldots\right) + v\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\dot{\alpha} + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}\dot{\beta} + \ldots\right)\right.$$
$$\left. + w\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}\dot{\alpha} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}\dot{\beta} \ldots\right)\right) = \Sigma m\left(u\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) + w\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\right)$$

Odtud:

$$A_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \alpha},\quad B_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \beta} \tag{6}$$

a
$$\Sigma m\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right) = A_0\delta\alpha + B_0\delta\beta + C_0\delta\gamma \tag{7}$$

§ 28. ***Lagrange-ovy rovnice.*** Hmotný bod m tělesného systému podléhá zevním silám X, Y, Z a silám vniterným X_i, Y_i, Z_i (tlakům, napjetím vniterným atd.). Pohyb jeho děje se dle zákonů:

$$m\frac{du}{dt} = X + X_i,\quad m\frac{dv}{dt} = Y + Y_i,\quad m\frac{dw}{dt} = Z + Z_i \tag{8}$$

V jistých případech (když se na př. jedná o systémy složené z těles tuhých neb z tekutin nestlačitelných, nepřihlížejíc k energii kapillárné) jest *virtuálná* práce vniterných sil

$$\Sigma(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z)$$

vždy nullou; v případech jiných, když se na př. jedná o tělesa dokonale pružná, jest tato práce *úplnou variací jistého úkonu* — E, kdež E jen od konfigurace částic systému závisí a se potenciálnou energií nazývá. V tomto (všeobecnějším) případě jest dle (8):

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{du}{dt}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{dv}{dt}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{dw}{dt}\right)\right] = \delta E \tag{9}$$

Rovnici (9) můžeme v našem případu, kdy posice každého bodu veličinami α, β, γ ustanovena jest, následovně transformovati: δE přejde v: $\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial E}{\partial \beta}\delta\beta + \ldots\right)$; virtuálná práce zevních sil $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ dá se pomocí rovnic (4) uvésti na tvar $A\delta\alpha + B\delta\alpha + \ldots$ $A\delta\alpha$ značí tudíž práci, kterou zevní síly vykonají, když se z veličin α, $\beta\ldots$ jen *prvá* virtuálně zvětší

o $\delta\alpha$. A samo nazývá se „všeobecnou komponentou sil“ příslušnou k všeobecné souřadnici „α“.

Je-li $\delta\alpha$ variací délky, jest A silou v užším smyslu slova, je-li $\delta\alpha$ variací oblouku, bude A dvojicí neb statickým momentem.

Rovnice (9) lze pak se zřetelem na (6) a (7) psáti ve formě

$$\left(A - \frac{\partial E}{\partial \alpha} - A_0\right)\delta\alpha + \left(B - \frac{\partial E}{\partial \beta} - B_0\right)\delta\beta + \ldots = 0$$

Variace $\delta\alpha$; $\delta\beta$... jsou nezávislé; tedy bude

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \alpha} = A - \frac{\partial E}{\partial \alpha} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \beta} = B - \frac{\partial E}{\partial \beta} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Vztahy (10), jichž jest tolik co všeobecných souřadnic, nazývají se *rovnice Lagrange-ovy.*

Jsou-li tělesa v *tekutině* obsažena, přistupují k zevnějším silám v užším smyslu slova, pro něž písmeny A, B... podržujeme, ještě tlaky tekutin, jichž všeobecné komponenty jsou A_p, B_p... Nutno tedy v (10) za A položiti $A + A_p$ atd. Výpočet těchto veličin A_p, B_p bude pak tvořiti obsah následujícího odstavce. Při tom podotýkáme, že se neobmezujeme na pohyby dějící se dle potenciálu jednoznačného. Připouštíme, že v tekutině mohou panovati i cyklické pohyby s konstantami k_1, k_2..., jichž jakož i veličin α, β... závislost na čase nám vyšetřiti bude. Potenciál rychlosti Φ bude míti tvar: $\Phi = \varphi + \psi$, kdež $\varphi = \varphi_1\dot{\alpha} + \varphi_2\dot{\beta} + \ldots$ *necyklickou* a $\psi = \psi_1 k_1 + \psi_2 k_2 \ldots$ *cyklickou* část potenciálu označuje (viz kap. III.).

Souřadnice x, y, z, ať bodu těles neb tekutin, vztahují se k systému v prostoru pevnému. Prostor mnohonásobně souvislý proměníme barrierami v prostě souvislý, tak že ψ bude *jednoznačným* úkonem potenciálovým.

§ 29. ***Všeobecné komponenty tlaků na tělesech účinkujících.*** Virtuálné posunutí těles normálně ku povrchu jest dle (5):

$$\delta n = \delta\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \delta\beta \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \ldots,$$

virtuálná práce tlaků na všech tělesech:

$$A_p\delta\alpha + B_p\delta\beta + .. = \int_h d\omega(-p)\,\delta n = \int_h (-p)\left(\delta\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \delta\beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + ..\right)d\omega,$$

tedy všeobecná komponenta jejich A_p příslušná souřadnici α:

$$A_p = -\int_h p\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,d\omega \qquad (10^a)$$

Integrace vztahuje se na *povrchy těles* jakožto na *vlastní* hranice prostoru bezvířivou tekutinou vyplněného a jest zde označena indexem h. Index b na témže místě bude příslušeti integracím vztaženým přes *obě* strany *všech* barrier, index b_i integraci přes obě strany i-té barriery, index $(b_i \pm)$ jen k positivné (negativné) její straně, index $b+h$ náleží integraci přes *všechny* hranice i barriery. Zavedením hodnoty $\frac{p}{\varrho} = S - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}V^2 - P$ z (20) kap. II. obdržíme:

$$A_p = \varrho\int_h\left(-S + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + P\right).\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,d\omega \qquad (11)$$

S jest arbitrárnou na x, y, z nezávislou veličinou, která vypadne protože $\int_h\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,d\omega$, v němž $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ jest úkonem *jednoznačným*, se transformuje dle *Greenovy* poučky na $-\int d\tau\,.\,\Delta\varphi_1 = 0$. Lze tedy položiti $S = 0$.

Dle dřívějšího jest $\Phi = \varphi + \Sigma k_i\psi_i$ neurčité až na konstantu, ostatně jednoznačné v prostoru barrierami opatřeném a na nich určitým způsobem rozpojité. Teprve tehdy, když přiřadíme libovolnému bodu prostorovému 0 určitou hodnotu $\Phi = \Phi_0$, jest při dané poloze *těles* a *barrier* Φ v bodě x, y, z přesně ustanoveno

rovnicí: $$\Phi - \Phi_0 = \int_0^{x,\,y,\,z}(u\,dx + v\,dy + w\,dz).$$

Změní-li se α v $\alpha + \delta\alpha$, změní se sice *určitým* způsobem *posice* i *tvar* těles, ale stran poloh nových barrier neexistuje žádné ustanovení. Uvážíce, že k úplnému určení potenciálu Φ jest nutno věděti také *polohu* barrier, seznáme, že nelze bez bližších údajů Φ považovati za úkon veličin α, β ...

Ustanovíme-li však, 1) že přechod barrier z původních do nových poloh se má díti nepřetržitě, tak že tvar i posice barrier jsou ustanoveny jakousi libovolnou ale určitou funkcí veličin α, β, γ a 2), že v témže bodě prostorovém 0 má vždy panovati totéž $\Phi = \Phi_0$, stane se Φ *určitou* funkcí veličin α, β, γ. (Mimo to jest ještě úkonem argumentů x, y, z, a cyklických konstant k_1, $k_2 \ldots$, které závisí jen na čase t explicitně, nikoli na α, β, γ.) Hořejším ustanovením stran barrier a bodu 0 může se vůči jiným podobným Φ, tudíž i $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ změniti jen o veličinu na x, y, z nezávislou, která ve výrazu pro A_p (rovn. 11) vypadne z týchže důvodů jako S. Jde-li o tělesa tuhá, jest nejpohodlněji považovati barriery za neměnitelné s tělesy pevně spojené útvary geometrické.

Při těchto patrně dovolených ustanoveních umožní se další rozvoj veličiny A_p v (11).

Výraz pro p dá se uvésti na formu:

$$\frac{p}{\varrho} = -\tfrac{1}{2} V^2 + P + \Sigma \frac{dk_i}{dt} \psi_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} + \ldots$$

Tlak nemůže dle své povahy býti rozpojitým na barrierách, musí tedy na i-té barrieře býti $p_{bi(+)} - p_{bi(-)} = 0$. Šetříce toho obdržíme se zřetelem k relaci: $\psi_{i\,(bi+)} - \psi_{i\,(bi-)} = 1$

$$0 = \frac{dk_i}{dt} + P_{(bi+)} - P_{(bi-)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \dot{\beta} \ldots\right)_{(bi+)}$$
$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \dot{\beta} \ldots\right)_{(bi-)}.$$

Dle rovnice (5) kap. III. jest $\frac{dk_i}{dt}$ čili časový vzrost integrálu $k_i = \int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ na uzavřené křivce roven práci sil zevnějších. Jelikož dle ustanovení integrace v k_i jde od záporné ku kladné straně barriery, a práce sil tamtéž se rovná obnosu $P_{(-)} - P_{(+)}$, o který mnohonásobný potenciál P klesl, musí $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \dot{\beta} \ldots$, tudíž i $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ býti úkony na barrierách spojitými.

Položme [viz rovnici (11)]:

$$J_1 = \int_h P \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega = \int_{b+h} P \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega - \int_b P \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega, \qquad (12)$$

žených k pevnému prostorovému systému. Jsou-li X, Y, Z síly zevnější a vztahuje-li se Σ na všechny elementy systému, platí šest rovnic:

$$\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma X,\quad \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(Y),\quad \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(Z),$$

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(Zy-Yz),\quad \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(Xz-Zx),$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Yx-Xy) \qquad (36^c)$$

Představme si, že okamžitě panující pohyb vznikne z klidu impulsivnými silami, jichž součet jest: $\Sigma\int_0^\tau X\,dt=C_1,\ C_2,\ C_3$ a podobnými momenty $C_4=\Sigma\int_0^\tau dt\,(Zy-Yz),\ C_5,\ C_6$. Se zřetelem na:

$$\Sigma\int_0^\tau m\frac{d^2x}{dt^2}\,dt=\Big|_0^\tau \Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma m\frac{dx}{dt},$$

a

$$\int_0^\tau \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt$$

$$=\int_0^\tau dt\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

obdržíme:

$$C_1=\Sigma m\frac{dx}{dt},\quad C_2=\Sigma m\frac{dy}{dt},\quad C_3=\Sigma m\frac{dz}{dt},\quad C_6=\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$C_4=\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\quad C_5=\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right) \qquad (36^d)$$

Je tedy možná, výsledné impulsivné síly a jejich momenty vyjádřiti *pohybovými* momenty $m\frac{dx}{dt}$ atd. a posicemi bodů m.

Takovým bodovým systémem jest tekutina, na kterou účinkují během vzniku čisté cyklosy impulsivné tlaky hranic, to jest těles a barrier.

Bude tedy možná, předchozí výsledek týkající se významu veličiny $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$ atd. odvoditi přímo z rovnic (36^d), jak něco níže dokázáno bude, až budou provedeny jisté průpravné výklady. Prozatím chceme pokračovati v diskusi veličiny $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$.

Příčinou impulsivných tlaků jsou patrně zevní impulsivné síly účinkující na tělese a barrierách během vzniku cyklosy,

které však impulsivnými tlaky tekutiny na těleso a barriery jeho kompensovány býti musí: na tělese (hmotném) proto, že se do pohybu dostati nemá a na barrierách, které mají rychlost, z toho důvodu, že je předpokládáme bezehmotnými. (V opaku byla by akcelerace částic barrierových nekonečně velikou.) Uvážíce princip akce a reakce můžeme též říci, že $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$ jest všeobecnou α komponentou impulsivných sil na těleso a barriery účinkujících. Sloučíme-li je ve tři výslednice $\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ a tři momenty $\overline{M_x}\,\overline{M_y}\,\overline{M_z}$ dle os s tělesem pevně spojených a má-li těleso dle týchž os okamžité rychlosti postupné u, v, w, potažmo angulárné p, q, r, bude výraz

$$\overline{X}u\,dt + \overline{Y}v\,dt + \overline{Z}w\,dt + \overline{M_x}p\,dt + \overline{M_y}q\,dt + \overline{M_z}r\,dt$$

prací impulsivných sil a momentů při posunutích tělesa o $u\,dt$.. a otočeních $p\,dt$... Vyjádříme-li však posici tělesa šesti všeobecnými souřadnicemi α, β... a jeho rychlosti $u\ldots r$ všeobecnými rychlostmi $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$..., odpovídají zmíněnému nekonečně malému posunutí a otočení změny všeobecných souřadnic o $\dot{\alpha}\,dt$, $\dot{\beta}\,dt$... a uvedené práci (dle definice všeobecné komponenty síly) výraz: $\quad -\varrho\Psi^{(\alpha)}.\,\dot{\alpha}\,dt - \varrho\Psi^{(\beta)}.\,\dot{\beta}\,dt$ atd.

Odtud jde, že veličina S v (34) a (35) jest dána vzorcem

$$\begin{aligned} -S &= -\varrho(\Psi^{(\alpha)}\dot{\alpha} + \Psi^{(\beta)}.\,\dot{\beta} + \ldots) \\ &= \overline{X}u + \overline{Y}v + \overline{Z}w + \overline{M_x}p + \overline{M_y}q + \overline{M_z}r \end{aligned} \qquad (36^g)$$

Veličiny $\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\,\overline{M_x}\,\overline{M_y}\,\overline{M_z}$ jsou patrně při dané poloze barrier nezávislé na posici tělesa v prostoru, protože se vztahují k souřadnicovému systému s ním pevně spojenému a jsou jak brzy nahlédneme i na poloze barrier nezávislé tedy konstanty, které z tvaru tělesa se dají vypočítati spůsobem, jenž později uveden bude. I energie čistě cyklického pohybu K jest na posici tělesa nezávislou, při čemž však výslovně podotýkáme, že obé platí pro *jedno* těleso v *nekonečné* tekutině s nullovým pohybem v nekonečnu. Nalezené S v (36^g) dosadíme do (35^a); K lze tu vynechati, protože od času jen potud záviseti může, pokud na něm závisí cyklické konstanty k_i a protože se dle t obsaženého v k_i derivovati nemá. Tím obdržíme výraz

$$\overline{T} = T_0 + \Theta + \overline{X}u + \overline{Y}v + \overline{Z}w + \overline{M_x}p + \overline{M_y}q + \overline{M_z}r \qquad (36^h)$$

§ 32. ***Jiný význam veličin*** $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$; ***rozšíření jeho na větší počet tuhých těles.*** Bylo již uvedeno, že veličiny $\overline{X}$, $\overline{Y}$... lze vyjádřiti čistě kinematickými výrazy; totéž platí o všeobecné komponentě $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$.

Má-li změna veličiny α o $\delta\alpha$ v zápětí, že se povrchový bod tělesa neb barriery s ním pevně spojené ve směru normály posune o $\delta\alpha(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)$, bude okamžité rychlosti $\dot{\alpha}=1$ odpovídati okamžitá normálová rychlost *tělesa* $(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)$, která jest identická s $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$, kdežto $\nu = \xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz$ jest za uvedené podmínky normálovou rychlostí *bodu barrierového*. Dle toho bude (viz 36[b])

$$-\varrho\Psi^{(\alpha)} = -\varrho\int_{b+h}\psi(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)\, d\omega$$
$$= -\varrho\int_{h}\psi\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\, d\omega - \varrho\int_{b}\psi\, \nu\, d\omega$$

neb
$$-\varrho\Psi^{(\alpha)} = -\varrho\int_{b+h}\psi\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\, d\omega + \varrho\int_{b}\psi\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu\right) d\omega.$$

Integrál prvý (na pravé straně) redukuje se dle (9[a]) kap. III. na nullu a za integrál přes barriery, tudíž i za $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$, lze se zřetelem na jednoznačnost úkonu $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu$ položiti

$$-\varrho\Psi^{(\alpha)} = \varrho\sum_{i=1} k_i \int_{bi+} d\omega\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu\right) \qquad (36^{i})$$

Opakujeme, že ν jest normálový pohyb, který by barriera na nějakém místě měla jsouc v pevném spojení s tělesem následkem $\dot{\alpha}=1$, $\dot{\beta}=\dot{\gamma}=\ldots 0$; $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ jest normálový pohyb, který by *tekutina* tamtéž měla, kdyby existoval jen pohyb necyklický φ_1 opět přidružený ku $\dot{\alpha}=1$, $\dot{\beta}=0$, $\dot{\gamma}=0$. Difference $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu$ označuje tudíž normálovou komponentu relativné rychlosti tekutiny vůči tělesu za téže okolnosti.

Jest tedy $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$ identické s výrazem, který obdržíme, když sečteme výrazy jako $\varrho k_i\int_{bi(+)} d\omega\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu\right)$, který jest až na faktor k_i relativným hmotným tokem (fluxem) příslušným ku $\dot{\alpha}=1$,

$\dot{\beta} = \dot{\gamma} = \ldots = 0$ skrz i-tou barrieru. Tento relativný tok, který jest tak míněn, jako kdyby těleso stálo, bude na poloze barriery nezávislým, poněvadž by v opaku mezi dvěma polohama *téže* barriery musilo nastati buď vakuum neb zhuštění tekutiny.

Jde-li na př. o $\overline{X}$ a přísluší-li φ_1 případu, kdy se těleso pohybuje rychlostí rovnou 1 směrem osy x-ové s ním pevně spojené, bude rychlost barrierového bodu při pevném spojení s tělesem rovna jedničce a normálová komponenta její: $\nu = \cos nx$ tedy dle (36^{i}):

$$\overline{X} = \varrho \sum_{i=1} k_i \int_{bi(+)} d\omega \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \cos nx \right) \qquad (36^{k})$$

Přísluší-li M_z a φ_6 případu, kdy se těleso točí angulárnou rychlostí 1 kolem osy z s ním pevně spojené, jsou osové složky rychlosti barrierového bodu rovny: $-y, +x, 0$, tedy $\nu = x \cos ny - y \cos nx$ a

$$M_z = \varrho \sum_{i=1} k_i \int_{bi(+)} d\omega \left(\frac{\partial \varphi_6}{\partial n} - x \cos ny + y \cos nx \right) \qquad (36^{l})$$

K týmže výrazům přijdeme, jak již podotknuto bylo z rovnic (36^{d}):

$$C_1 = \Sigma m \frac{dx}{dt}, \text{ atd.}, \; C_6 = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \text{ atd.}$$

Součet vztahuje se zde na *všechny* částice systému, které na sebe účinkují silami dle principu akce a reakce (zde tlaky), tedy i k zevní stěně, která v sobě uzavírá tělesa i tekutinu. Je-li tato v klidu, vztahuje se $\Sigma m \frac{dx}{dt}$ jen na těleso a tekutinu, jsou-li tělesa v klidu (na př. u čisté cyklosy), jen na tekutinu. Součty C_1 a podobně C_6 vztahují se opět ku *všem* impulsivným silám a momentům, které účinkují na zevní stěně, tekutině a tělesech. Je-li zevní stěna v nekonečnu a je-li pohyb tekutiny a těles jen v nekonečnu od nully rozdílný, tak že se vliv impulsivného tlaku tekutiny až do nekonečna nerozšíří, nemusí se na nekonečně vzdálenou stěnu žádné impulsivné síly applikovati. U tekutin stačí je applikovati vůbec jen na hranice, zde na tělesa, protože potenciálový pohyb tekutiny vznikne od nich se rozšiřujícím tlakem impulsivným.

Položíme-li osy v prostoru pevné na okamžik do os s tělesem pevně spojených, bude $m = dx\, dy\, dz \,.\, \varrho = \varrho\, d\tau$, a se zřete-

lem na čistě cyklický pohyb, o nějž tu jde, $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, $C_1 = \overline{X}$, tedy

$$\overline{X} = \varrho\int d\tau \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\varrho\int\limits_{b+h} d\omega\, \psi \cos nx = -\varrho\int\limits_{h} d\omega \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\psi - \varrho\int\limits_{b} d\omega\, \psi \cos nx;$$

neboť na tělese jest: $\cos nx = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$. Odtud:

$$\overline{X} = -\varrho\int\limits_{b+h} d\omega \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\psi + \varrho\int\limits_{b}\psi\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \cos nx\right)d\omega = \varrho\sum_{i=1} k_i\int\limits_{bi(+)} d\omega\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \cos nx\right)$$

Podobně máme kladouce $C_6 = \overline{M}_z$, $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$:

$$\overline{M}_z = \int \varrho\, d\tau\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \varrho\int\limits_{b+h} d\omega\, \psi\,(y \cos nx - x \cos ny).$$

Na tělese jest: $\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x \cos ny - y \cos nx$,

tedy $\overline{M}_z = -\varrho\int\limits_{h+b} d\omega\, \psi \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} + \varrho\int\limits_{b} d\omega\, \psi\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} + y \cos nx - x \cos ny\right)$

neb $\overline{M}_z = \varrho\sum_{i=1} k_i\int\limits_{bi(+)} d\omega\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} + y \cos nx - x \cos ny\right)$

Je-li tedy φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_6$ vypočteno z tvaru tělesa, lze najíti $\overline{X} \ldots \overline{M}_z$; jsou to jak vidět naprosté konstanty.

Později budeme se zevrubněji zabývati pohybem rotačního tělesa s jedním naveskrz jdoucím k ose rotační rovněž symmetrickým otvorem, tedy s prstenem. Položíme-li osu z do osy rotační, bude z důvodů symmetrie jen $\overline{Z} \gtrless o$, a

$$\overline{X} = \overline{Y} = \overline{M}_x = \overline{M}_y = \overline{M}_z = o.$$

K výsledkům tohoto odstavce lze přijíti i jiným způsobem, jenž se neobmezuje na existenci *jednoho* tuhého tělesa v tekutině nekonečné, nýbrž připouští větší počet jejich. Veličina ψ jest dle definice jednoznačným úkonem posice potenciálového bodu při dané konfiguraci těles a zároveň určitým úkonem argumentů α, β, γ, považujeme-li barriery za neměnitelné útvary, které jsou s tělesy trvale v pevném spojení. K této okolnosti

třeba hleděti při výpočtu veličiny $\int d\tau \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$. Změní-li se α, jedna z šesti souřadnic *prvého* tělesa I o $\delta\alpha$, posune se libovolný bod na povrchu tohoto tělesa neb na barrierách jeho o

$$\delta\alpha\,(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)$$

normálně ve směru do tekutiny. „Integrační prostor“ se tím zmenšil na elementu povrchovém $d\omega$ o

$$d\omega\,\delta\alpha\,(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz);$$

současně se v určitém místě prostorovém zvětšilo ψ o $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\delta\alpha$.

Spůsobem podobným jako v § 29. nalezneme v úvaze, že i barriery jsou hranicemi prostoru:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int \psi\, d\tau = -\int_{(b+h)I} \psi\,(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)\, d\omega + \int d\tau \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

Přípona $(b + h)I$ má označovati integraci přes povrch a barriery tělesa I, k němuž α náleží, protože při změně $\delta\alpha$ ostatní tělesa i barriery jejich v klidu zůstanou.

Na povrchu tohoto prvého tělesa jest

$$\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n},$$

na jeho barrierách $= \nu$. Necyklický potenciál φ_1 přísluší určitému pohybu tělesa *prvého*, jest tedy $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ na povrchu ostatních těles nullou a

$$J = \int_{hI} \psi\,(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)\, d\omega = \int_{hI} \psi\, d\omega\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \int_{h} \psi\, d\omega\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n},$$

kdež se integrace h vztahuje na povrchy *všech* těles. Odtud jde dle (9^a kap. III.):

$$J = \int_{h+b} \psi\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega - \int_{b} \psi\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega = -\int_{b} \psi\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega,$$

kdež b se vztahuje na všechny barriery vůbec. Tím obdržíme:

$$\psi^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int d\tau\, \psi - \int_{bI} \psi\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \nu\right) d\omega - \int_{b\,II\,III} \psi\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\omega \qquad (36^m)$$

Přípona I označuje příslušnost integrace k barrierám tělesa prvého, přípona II III k barrierám ostatních těles. Podobný by byl výraz pro:

$$\Psi^{(\beta)} = \frac{\partial}{\partial\beta}\int d\tau\, \psi - \int_{\mathrm{bn}} \psi \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \nu\right) d\omega - \int_{\mathrm{bs}} \psi \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, d\omega \qquad (36^{\mathrm{n}})$$

kdyby příslušelo φ_2 ku $\dot\beta = 1$ a β bylo souřadnicí tělesa n-tého, tak že se přípona *bn* vztahuje na barriery tohoto a *bs* na barriery těles ostatních. Uvážíme li, že ve výrazu J_3 [rovn. (33)] rovněž jako v (35) se veličiny $\Psi^{(\alpha)}$, $\Psi^{(\beta)}$ atd. vyskytují jen v kombinacích jako $\frac{\partial\Psi^{(\alpha)}}{\partial\beta} - \frac{\partial\Psi^{(\beta)}}{\partial\alpha}$, můžeme v (36m, n) prvé členy na pravo vůbec vynechati a veličiny $\Psi^{(\alpha)}$, $\Psi^{(\beta)}$ definovati členy zbývajícími. Takto obdržíme:

$$-\varrho\Psi^{(\alpha)} = \varrho\int_{\mathrm{b\,I}} \psi\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu\right) d\omega + \varrho\int_{\mathrm{b\,II\,III}} \psi\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\, d\omega$$

$$= \varrho \sum_{i=1,\ \mathrm{I}} \int_{\mathrm{bi}(+)} d\omega \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \nu\right) + \varrho \sum_{i=1,\ \mathrm{II\,III}} \int_{\mathrm{bi}} d\omega\, \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \qquad (36^{\nu})$$

Prvá summa byla již interpretována; nezávisí na poloze barrier. Druhou, vztahující se k barrierám ostatních těles II III lze podobně interpretovati pomocí „toku", jejž necyklický pohyb φ_1 posílá skrz barriery jejich.

Protože tělesa II, III... při pohybu φ_1 v klidu zůstávají, jest tok i tu na poloze barrier nezávislý a tím i summa druhá. Protože se rovnice (36ν) dá zpět transformovati na:

$$-\varrho\Psi^{(\alpha)} = \int_{(\mathrm{b+h})\,\mathrm{I}} (-\varrho\psi)\,(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)\, d\omega,$$

má $-\varrho\Psi^{(\alpha)}$ též význam všeobecné α komponenty impulsivných tlaků (čili zevnějších sil impulsivných), které během vzniku čisté cyklosy na ono těleso účinkovati musí, jemuž náleží všeobecná souřadnice α.

Poznámka. V nepřítomnosti cyklosy a víření jest rychlost bodů tekutinových úplně určena normálovými rychlostmi na povrchu těles a energie celého systému jest kvadratickou formou všeobecných rychlostí $\dot\alpha$, $\dot\beta$... Tuto okolnost považoval *W. Thomson* (Natural Phil. I. vydání, angl. vyd. z r. 1896 p. 328) za dostatečnou záruku možnosti, applikovat rovnice *Lagrange-ovy* bezprostředně na hydrodynamické problémy povahy nahoře uvedené. Nesnáze vězící v *Thomsonově* koncepci, neobyčejně důvtipné a svými konsekvencemi důležité a plodné,

byly mnohdy pociťovány. Rovnice *Lagrange-ovy* jsou totiž, ať je odvodíme z principu *d'Alembertova* neb *Hamiltonova*, vázány na podmínku, že souřadnice libovolného systémového bodu jsou úkony všeobecných souřadnic α, β, γ... (eventuálně ještě explicitního t). Tuto podmínku nelze u tekutin a priori považovati za splněnou. Pohybuje-li se systém těles z jedné konfigurace α, β, γ... do jiné α_1, β_1, γ_1 (třeba nekonečně pomalu), pohybuje se libovolný bod tekutiny A z posice A do A_1, nelze však bez důkazu přijmouti za pravdu, že se A dostane opět do téhož A_1, když systém těles do téže posice druhé se dostal cestou jinou, nelze tudíž bez důkazu dalšího posici tekutinového bodu A považovati za úkon všeobecných souřadnic α, β, γ. V druhém vydání své *Nat. Phil.* obírá se *W. Thomson* rozborem *Lagrange-ových* rovnic v případě, kdy koefficienty ve výrazu pro kinetickou energii nezávisí na *jedné* skupině všeobecných souřadnic (ignored coordinates), okolnost to, k níž podnět dal patrně již *Maxwell* (II) a ku které se též *Helmholtz* vrací ve svém pojednání „Statik der monocyclischen Systeme", mnohem později vyšlém. Sem náleží na př. výrazy pro kinetickou energii obyčejného setrvačníku, cyklického pohybu tekutiny, vůbec všech pohybů, kde částice tak obíhají v drahách uzavřených, že na posici jejich v těchto dráhách nezáleží. Co na abstraktní analyse *Thomsonově* nejvíce překvapuje a porozumění její znesnadňuje, jest applikace na konkretní případy, zejména na pohyby těles v tekutině v přítomnosti cyklosy. Z toho důvodu vyšetřen zde vliv tekutiny na tělesa cestou přímou, jak se později ukázalo již *C. Neumannem* (v „Hydrodynamische Untersuchungen" 1882) nastoupenou. *C. Neumann* považuje, jak se zdá, rovnice jím odvozené (zde 35) za rozdílné od rovnic *Thomsonových*, protože nedospěl k fysikálné interpretaci veličin $-\varrho\psi^{(\alpha)}$, která teprve identitu jejich dokazuje.

Ostatně podotýkáme, že jak *Thomson* tak *Neumann* supponují jen ty případy, kdy skrz jednoznačnost potenciálu sil tekutinových cyklické konstanty k na čase nezávisí.

§ 33. ***Všeobecné úvahy o rovnicích*** (35), (35ª) a (36). Integrace rovnic způsobuje značné obtíže i v případech podle zdání jednoduchých. Jde-li o síly, kterými v přítomnosti čisté cyklosy systém prstenů držen býti musí, aby se části jeho do pohybu nedostaly, položíme v (35) vše nullou, co od času závisí. Jde-li o prsteny tuhé, a není-li tekutina silám podrobena, máme dříve již (pag. 47) diskutovaný výsledek: $A = \frac{\partial K}{\partial \alpha}$, $B = \frac{\partial K}{\partial \beta}$...

Poněkud jednodušší jest stav věci, když *není* cyklického pohybu. Pak jsou v platnosti rovnice (36).

Jsou-li v tekutině obsažena *dvě* tuhá nebo pružná tělesa, a náleží-li jednomu z nich serie všeobecných souřadnic α, β..., druhému α', β', γ', bude výraz pro kinetickou energii obsahovati členy jako $\dot{\alpha}\dot{\alpha}'$, $\dot{\alpha}\dot{\beta}'$..., které od *koexistence* obou těles pocházejí. Následkem toho a okolnosti, že se v koefficientech výrazu pro kin. energii vyskytují α, β.. α', β'.., mohou pak obě tělesa

prostřednictvím tekutiny na sebe účinkovati tak jako kdyby mezi nimi panovala jakási „akce in distans“. Později budou některé případy dopodrobna uvedeny.

Avšak i tehdy, když jde o *jedno* těleso, vzbuzuje pohyb *jedné* souřadnici tělesa příslušný pohyb příslušný souřadnici *druhé*. Tak na př. jest postupný pohyb těžiště tuhého tělesa v prostoru *vzduchoprázdném* nezávislý na rotačním pohybu, nikoli však v tekutině. Rotační pohyb lodního šroubu má v zápětí pohyb celé lodi, oscillující pohyb křídel ptáka vzlet do výše.

V následujícím odstavci budeme se výhradně zabývati pohybem *jednoho* tuhého tělesa v tekutině nekonečné.

Rovnice se dají značně zjednodušiti a jsou podobny rovnicím, které platí pro pohyb tuhého tělesa v prostoru vzduchoprázdném.

§ 34. ***Kirchhoffovy rovnice pro pohyb tuhého útvaru v nekonečné tekutině rozšířené na případ cyklosy.*** Mysleme si tři s tělesem pevně spojené souřadnicové osy x, y, z, podél nichž, potažmo kol nichž těleso má v jistém okamžiku postupné a angulárné rychlosti u, v, w, p, q, r. Počátek souřadnic O mějž se zřetelem na jiný, v prostoru pevný systém x', y', z' souřadnice α, β, γ, jež tvoří *jednu skupinu* všeobecných souřadnic *Lagrange-ových.* Angulárná posice systému x, y, z jest ustanovena úhly ω, ϑ, χ (viz obr. 4.), které tvoří *druhou* skupinu (čáry Ox', Oy', Oz' v obr. 4. označují parallely k osám pevným), $OI \perp Ozz'$ jest *uzlová* čára, OII jiná čára v rovině Oxy, od OI o 90^0 vzdálená a patrně v rovině Ozz' obsažená. Změnu úhlu ω o $\delta\omega$, to jest nekonečně malé otočení kolem Oz' lze rozložiti na otočení kol Oz, jež obnáší $\delta\omega \cos\vartheta$, a na otočení kol OII v obnosu $\delta\omega \sin\vartheta$ Toto poslední lze opět rozložiti na otočení kol Oy v obnosu $\delta\omega \sin\vartheta \cos(90-\chi)$ a na jiné $\delta\omega \sin\vartheta \cos(180-\chi)$ kolem Ox. Jinými slovy řečeno lze angulárnou rychlost $\dot\omega$ kol Oz' rozložiti na $-\dot\omega \sin\vartheta \cos\chi$, $\dot\omega \sin\vartheta \sin\chi$ a $\dot\omega \cos\vartheta$ dle tří os Ox, Oy, Oz. Podobně lze rychlost otočení $\dot\vartheta$ kol osy OI rozložiti na $\dot\vartheta \sin\chi$ a $\dot\vartheta \cos\chi$ kol os x a y. Konečně jest zvětšení úhlu χ ekvivalentné s otočením kol Oz.

Odtud:

$$\begin{aligned} p &= -\dot\omega \sin\vartheta \cos\chi + \dot\vartheta \sin\chi \\ q &= \dot\omega \sin\vartheta \sin\chi + \dot\vartheta \cos\chi \\ r &= \dot\chi + \dot\omega \cos\vartheta \end{aligned} \qquad (37)$$

Mezi směrovými cosinusy os $x y z$ a $x' y' z'$ budiž vztah udaný schematem:

	x'	y'	z'
x	λ_1	μ_1	ν_1
y	λ_2	μ_2	ν_2
z	λ_3	μ_3	ν_3

Odtud jde;

$$\begin{aligned} u &= \dot{\alpha}\lambda_1 + \mu_1\dot{\beta} + \nu_1\dot{\gamma} \\ v &= \dot{\alpha}\lambda_2 + \mu_2\dot{\beta} + \nu_2\dot{\gamma} \\ w &= \dot{\alpha}\lambda_3 + \mu_3\dot{\beta} + \nu_3\dot{\gamma} \end{aligned} \tag{38}$$

Koefficienty ve výrazu (36[b]): $\overline{T} = T_0 + \Theta + (\overline{X}u + \ldots \overline{M}_z r)$ jsou stálé a dané veličiny, vyjádříme-li $\overline{T}$ rychlostmi $u, v \ldots r$. Dosazením hodnot ze (37) a (38) stane se $\overline{T}$ úkonem rychlostí $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\chi}$, koefficienty nejsou pak stálé.

Dlužno poznamenati, že

a) koefficienty nezávisí na α, β, γ, protože se tyto veličiny nevyskytují ani v (37) ani v (38).

b) Faktory u $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ ve výrazu pro w v rovnici (38) jsou směrové cosinusy osy z, nezávisí tudíž na χ.

c) Projekce rychlosti postupné (jejíž složky jsou $\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\,\dot{\gamma}$) na směry OI neb OII nezávisí na χ, neboť změní-li se *jen* tento úhel, nezmění polohu svou ani rovina Oxy ani směry OI a OII.

Patrně jest

$$\begin{aligned} u &= (OI)\sin\chi + (OII)\cos(180^\circ - \chi) = (OI)\sin\chi - (OII)\cos\chi \\ v &= (OI)\cos\chi + (OII)\sin\chi, \end{aligned} \tag{38a}$$

jestliže (OI) a (OII) značí komponenty výsledné postupné rychlosti dle os (OI) a (OII).

d) Odtud jde se zřetelem na pozdější potřebu dle poznámky (*c*)

$$\frac{\partial u}{\partial \chi} = OI\cos\chi + OII\sin\chi = v, \quad \frac{\partial v}{\partial \chi} = - OI\sin\chi + OII\cos\chi = -u$$

e) Výrazy jako $A' = A + \int\limits_h \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} P\, d\omega$, které se v rovnicích (35[a]) *) na pravé straně vyskytují, jsou dle odvození všeobecnými

*) K vůli zjednodušení úvah předpokládáme jednoznačnost potenciálu P, integrace v (35a) redukuje se pak na integraci dle h, E jest u tuhého tělesa stálým.

komponentami jednak ***zevnějších sil*** v užším smyslu slova, jimž *těleso* podléhá, jinak tlaků *Archimedových.* Zoveme-li komponentu ku χ příslušnou zkrátka M_z, bude $M_z \delta\chi$ virtuálnou prací jejich, jestliže se těleso kol osy z otočí o $\delta\chi$, bude tedy M_z statickým momentem zevních sil a *Archimedových* tlaků příslušným k ose Oz. Podobně bude, značí-li α v (35^a) *Cartesiovu* souřadnici bodu O, $A'\delta\alpha$ prací jejich při posunutí tělesa o $\delta\alpha$, tedy A' jejich výslednicí ve směru osy Ox'.

Příslušná ku χ *Lagrange-ova* rovnice jest tedy dle (35^a):

$$M_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\chi}}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial \chi};$$

χ vězí však dle (37) a (38) jen v $p\,q$ nikoli v r, pak v u a v, nikoli však ve w.

Bude tedy:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \chi} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \chi} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \chi}.$$

Uvážíme-li předně, že dle (37) jest $\frac{\partial p}{\partial \chi} = q$, $\frac{\partial q}{\partial \chi} = -p$, pak výsledek v ($d$), najdeme:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \chi} = v\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} - u\frac{\partial \overline{T}}{\partial v} + q\frac{\partial \overline{T}}{\partial p} - p\frac{\partial \overline{T}}{\partial q}.$$

Dále jest: $$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\chi}} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial \dot{\chi}} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial \dot{\chi}} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \dot{\chi}}$$

neb dle (37): $$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\chi}} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}.$$

Zmíněná Lagrange-ova rovnice zní tedy:

$$M_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right) + u\frac{\partial \overline{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} + p\frac{\partial \overline{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \overline{T}}{\partial p}$$

Podobným způsobem bylo by lze najíti dvě jiné rovnice:

$$M_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial p}\right) + v\frac{\partial \overline{T}}{\partial w} - w\frac{\partial \overline{T}}{\partial v} + q\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - r\frac{\partial \overline{T}}{\partial q}$$

$$M_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q}\right) + w\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} - u\frac{\partial \overline{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \overline{T}}{\partial p} - p\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \qquad (39)$$

Volme si za druhé *Lagrange-ovy* rovnice:

$$A' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\alpha}}\right); \quad \text{[dle } (a) \text{ jest } \frac{\partial \overline{T}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \beta} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \gamma} = 0]$$

$$B' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\beta}}\right), \quad C' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\gamma}}\right).$$

Se zřetelem na (38) máme:

$$A' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\lambda_1 + \frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\lambda_2 + \frac{\partial \overline{T}}{\partial w}\lambda_3\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\right)\lambda_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\right)\lambda_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial w}\right)\lambda_3 + \frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\dot{\lambda}_1 + \frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\dot{\lambda}_2 + \frac{\partial \overline{T}}{\partial w}\dot{\lambda}_3$$

a dvě podobné rovnice, na levo B' potažmo C' místo A', na pravo μ potažmo ν místo λ. Násobíme-li je po sobě na λ_1, μ_1, ν_1 a sečteme, obdržíme při zkráceném označení $A'\lambda_1 + B'\mu_1 + C'\nu_1 = X$ se zřetelem na $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1$, $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$ atd.

$$X = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\right) + \frac{\partial \overline{T}}{\partial u}(\lambda_1\dot{\lambda}_1 + \mu_1\dot{\mu}_1 + \nu_1\dot{\nu}_1) + \frac{\partial \overline{T}}{\partial v}(\lambda_1\dot{\lambda}_2 + \mu_1\dot{\mu}_2 + \nu_1\dot{\nu}_2)$$

$$+ \frac{\partial \overline{T}}{\partial w}(\lambda_1\dot{\lambda}_3 + \mu_1\dot{\mu}_3 + \nu_1\dot{\nu}_3)$$

Výraz lze zjednodušiti. Ze vztahu: $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1$ jde derivací dle t $\qquad \lambda_1\dot{\lambda}_1 + \mu_1\dot{\mu}_1 + \nu_1\dot{\nu}_1 = 0.$

Ze vztahu: $\qquad \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$

jde: $\qquad \lambda_1\dot{\lambda}_2 + \mu_1\dot{\mu}_2 + \nu_1\dot{\nu}_2 = -(\dot{\lambda}_1\lambda_2 + \dot{\mu}_1\mu_2 + \dot{\nu}_1\nu_2),$

podobně: $\qquad \lambda_1\dot{\lambda}_3 + \mu_1\dot{\mu}_3 + \nu_1\dot{\nu}_3 = -(\dot{\lambda}_1\lambda_3 + \dot{\mu}_1\mu_3 + \dot{\nu}_1\nu_3).$

Otočením o $q\,dt$ kol osy Oy přejde úhel mezi *novou* osou z a původní osou x z 90^0 na $(90^0 - q\,dt)$; současně přejde $\lambda_3 \ldots$ v $\lambda_3 + \frac{d\lambda_3}{dt}dt$, $\mu_3 \ldots$ v $\mu_3 + \frac{d\mu_3}{dt}dt$, ν_3 v $\nu_3 + \frac{d\nu_3}{dt}dt$, tak že:

$$\cos(90^0 - q\,dt) = \sin(q\,dt) = q\,dt$$

$$= \left(\lambda_3 + \frac{d\lambda_3}{dt}dt\right)\lambda_1 + \left(\mu_3 + \frac{d\mu_3}{dt}dt\right)\mu_1 + \left(\nu_3 + \frac{d\nu_3}{dt}dt\right)\nu_1.$$

Odtud:

$$q = \dot{\lambda}_3\lambda_1 + \dot{\mu}_3\mu_1 + \dot{\nu}_3\nu_1$$

a cyklickou přeměnou indexů 1, 2, 3 $\qquad$ (39[a])

$$r = \dot{\lambda}_1\lambda_2 + \dot{\mu}_1\mu_2 + \dot{\nu}_1\nu_2 = -(\lambda_1\dot{\lambda}_2 + \mu_1\dot{\mu}_2 + \nu_1\dot{\nu}_2)$$

Tím bude

a podobně

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\right) + q\frac{\partial \overline{T}}{\partial w} - r\frac{\partial \overline{T}}{\partial v} \\ Y &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\right) + r\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} - p\frac{\partial \overline{T}}{\partial w} \\ Z &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial w}\right) + p\frac{\partial \overline{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

$X = A'\lambda_1 + B'\mu_1 + C'\nu_1$ jest dle toho, co o A', B', C' řečeno bylo, výslednicí *Arch.* tlaků a zevnějších sil působících na těleso ve směru osy Ox, a podobný jest význam veličin Y i Z. Není-li cyklosy, jest $\overline{T} = T_0 + \Theta$. Tyto speciálnější vzorce odvodil *Kirchhoff* (*Borchardt J.* 71. Werke p. 376).

Rovnice platí, jak se samo sebou rozumí, i pro pohyb tělesa v prostoru vzduchoprázdném ($\overline{T} = T_0$). Početní mechanismus jest ten, že z nich napřed určíme rychlosti $uvwpqr$ jakožto úkony časové, pak integrací rovnic (37) úhly ω, ϑ, χ tedy i $\lambda_1 \ldots \mu_2 \ldots \nu_3$ a konečně integrací rovnic (38) souřadnice α, β, γ.

Jde-li o těleso v prostoru vzduchoprázdném, dá se $\overline{T}$ vyjádřiti vždy jakožto součet jednotlivých kvadrátů veličin $u \ldots r$, položíme-li počátek souřadnicového systému s tělesem pevně spojeného do těžiště a osy do hlavních os setrvačnosti. Nicméně jsou vzdor vzniklému tím zjednodušení rovnic případy, kdy se tyto integrovati dají, jen sporé, tedy nebude lze očekávati, že by se obtíže zmenšily, když půjde o těleso v *tekutině* obsažené.

Omezme se v prvé řadě na pohyby *necyklické*. Nepřihlížíme-li k zvláštním dříve zmíněným případům symmetrie, můžeme v $\overline{T}$, které jest nyní kvadr. homogenním úkonem rychlostí $uv \ldots r$, vhodnou volbou směrů os souřadnicových annulovati jen některé faktory, třeba při uv, vw, uw, nikoli ale současně při up, uq atd. Za to můžeme pomocí (39), (40) k *danému* pohybu vyšetřiti síly potřebné a alespoň takto se orientovati, jak by těleso samo sobě ponecháno se pohybovati snažilo.

Požadujeme-li na př., aby se pohyb děl jen dle směru osy x-ové, bez točení, tedy $v = w = p = q = r = 0$, vidíme se vzhledem k tomu, že $\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} \ldots \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}$ jsou lineárnými úkony veličin $uvwpqr$ (zde u), že k udržení supponovaného pohybu v tekutině bude třeba i sil i statických momentů v obnosech, které snadno z rovnic (39) a (40) najdeme.

Požadujeme-li ještě speciálněji, aby pohyb byl na čase nezávislým $\left(\frac{du}{dt}=0\right)$, musí býti $X=0$ $Y=0$ $Z=0$, $M_x=0$, $M_y=-u\frac{\partial\overline{T}}{\partial w}$, $M_z=u\frac{\partial\overline{T}}{\partial v}$.

Těleso hledí se tedy, patrně tlakem tekutiny, točiti kol osy kolmé ku směru postupu a tomu musí zevní momenty M_y a M_z zabraňovati. Není jich třeba, je-li $\frac{\partial\overline{T}}{\partial v}=0$ a $\frac{\partial\overline{T}}{\partial w}=0$, což vyžaduje takový směr os souřadnicových, aby ve výrazu $\overline{T}$ vymizely faktory při uv a uw.

Jestliže jsme nalezli jeden takový směr osy x-ové, můžeme vhodnou volbou os y a z způsobiti vymizení faktoru i při vw. Odtud jde, že v každém tělese existují tři k sobě kolmé směry té vlastnosti, že dle každého z nich těleso může bez točení postupovati s rychlostí rovnoměrnou, aniž by bylo třeba zevních sil a momentů k udržení tohoto jednoduchého pohybu. Nejmenší porušení jeho způsobí během času buď odchylky konečné (labilita) neb odchylky vždy nekonečné malé (stabilita pohybu).

Příklady k tomu budou později uvedeny.

§ 35. ***Důsledky ze všeobecných principů mechaniky.*** Pro systém materiálných bodů s vniternými silami, které se řídí principem akce a reakce, jest v platnosti šest rovnic:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx'}{dt}=\frac{dC_1}{dt}=\Sigma(X'); \quad \frac{dC_2}{dt}=\Sigma(Y'); \quad \frac{dC_3}{dt}=\Sigma(Z'); \qquad (41)$$

$$\frac{dC_4}{dt}=\Sigma m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=\Sigma(Z'y'-Y'z');$$

$$\frac{dC_5}{dt}=\Sigma(X'z'-Z'x'); \quad \frac{dC_6}{dt}=\Sigma(Y'x'-X'y'). \qquad (42)$$

$\Sigma(X')\ldots\Sigma(Z'y'-Y'z')\ldots$ jsou osové složky výsledných zevnějších accelerujících sil potažmo statických momentů hledíc k osám souřadnicovým $x'y'z'$ v prostoru pevným; C_1, C_2, C_3 potažmo C_4, C_5, C_6 mají týž význam se zřetelem na impulsivné síly, které by okamžitě panující pohyb z klidu vyvoditi dovedly; x', y', z' jsou souřadnice bodu m v témže systému.

Řečených šest rovnic (41) a (42) postačuje k řešení kterékoli úlohy dynamické, jde-li o systém, jenž *šesti* veličinami karakterisován jest. Sem náleží tuhé těleso v tekutině nestlačitelné. Postup počtu jest ten, že napřed vyšetříme složky impulsivných

sil a momentů $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, potažmo $\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$, se zřetelem na osy x, y, z s tělesem pevně spojené. Při témž označení směrových cosinusů os souřadnicových jako v § 34 bude:

$$\begin{aligned} C_1 &= \lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 \\ C_2 &= \mu_1\Gamma_1 + \mu_2\Gamma_2 + \mu_3\Gamma_3 \\ C_3 &= \nu_1\Gamma_1 + \nu_2\Gamma_2 + \nu_3\Gamma_3 \end{aligned} \tag{43}$$

Položíme-li počátkem souřadnicového systému xyz osy: $x''y''z''$ parallelně k osám $x'y'z'$, budou $x''y''z''$ náležeti statické momenty:

$$C'_4 = \Gamma_4\lambda_1 + \Gamma_5\lambda_2 + \Gamma_6\lambda_3,\ C'_5 = \Gamma_4\mu_1 + \Gamma_5\mu_2 + \Gamma_6\mu_3,$$
$$C'_6 = \Gamma_4\nu_1 + \Gamma_5\nu_2 + \Gamma_6\nu_3 \tag{43a}$$

Jsou-li souřadnice počátku systémového xyz v systému $x'y'z'$ dány písmenkami α, β, γ, bude na př.:

$$\begin{aligned} C'_6 &= \Sigma(Y''x'' - X''y'') = \Sigma\big(Y''(x' - \alpha) - X''(y' - \beta)\big) \\ &= C_6 - \alpha\Sigma Y'' + \beta\Sigma X'' \end{aligned}$$

neb: $$C_6 = C'_6 + \alpha C_2 - \beta C_1 \quad \text{a podobně.}$$
Tedy:

$$\left.\begin{aligned} C_4 &= \Gamma_4\lambda_1 + \Gamma_5\lambda_2 + \Gamma_6\lambda_3 + \beta C_3 - \gamma C_2 \\ C_5 &= \Gamma_4\mu_1 + \Gamma_5\mu_2 + \Gamma_6\mu_3 + \gamma C_1 - \alpha C_3 \\ C_6 &= \Gamma_4\nu_1 + \Gamma_5\nu_2 + \Gamma_6\nu_3 + \alpha C_2 - \beta C_1 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Co zbývá, jest v (43) a (44) vyjádřiti veličiny $\Gamma_1 \ldots \Gamma_6$ speciálnými podmínkami problému.

Patrně jest $\Gamma_1 = \Sigma m \frac{dx}{dt}$ součet impulsivných sil parallelně k ose x-ové. Rozdělíme-li součet na dvě části, z nichž Σ_1 se vztahuje k částicím tělesa a Σ_2 k částicím tekutiny a uvážíme-li, že pro body tělesa jest: $\frac{dx}{dt} = u - ry + qz$, $\frac{dy}{dt} = v - pz + rx$, bude

$$\Sigma_1\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma m\,(u - ry + qz) = \frac{\partial T_0}{\partial u},$$

označí-li se úhrnná kinetická energie tělesa:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_1 m\,[(u - ry + qz)^2 + (v - pz + rx)^2 + (w - qx + py)^2]$$

písmenem T_0.

Podobně bude

$$\Sigma_2\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \varrho\int d\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \overline{X} - \varrho\int_{h+b} d\omega\ \varphi\cos nx.\ ^{*)}$$

*) viz pag. 81 (nahoře).

Za integrál, jenž přes barriery vzat dává nullu, lze položiti se zřetelem, že na povrchu tělesa jest: $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\cos nx$, též:

$$\int\limits_h d\omega\,\varphi\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Theta}{\partial u}.\,^{*)}$$

Tím obdržíme $\qquad \Gamma_1=\overline{X}+\frac{\partial(T_0+\Theta)}{\partial u}.$

Podobně bude $\quad \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma_1+\Sigma_2$; pak

$$\Sigma_1\, m\left\{x(v-pz+rx)-y(u-ry+qz)\right\}=\frac{\partial T_0}{\partial r},$$

$$\Sigma_2=\varrho\int d\tau\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\varrho\int d\tau\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Prvý integrál v Σ_2 se transformuje na $\int\limits_{b+h} d\omega\,\varphi\,(y\cos nx-x\cos ny)$ neb se zřetelem na $x\cos ny-y\cos nx=\frac{\partial\varphi_6}{\partial n}$ na

$$-\int d\omega\,\varphi\,\frac{\partial\varphi_6}{\partial n}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Theta}{\partial r},$$

druhý integrál v Σ_2 jest $\overline{M}_z$, tedy $\Gamma_6=\overline{M}_z+\frac{\partial}{\partial r}(T_0+\Theta)$.

Z (36^h) obdržíme

$$\Gamma_1=\frac{\partial\overline{T}}{\partial u},\ \Gamma_2=\frac{\partial\overline{T}}{\partial v}\ldots\Gamma_6=\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}$$

tedy:

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\lambda_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial v}+\lambda_3\frac{\partial\overline{T}}{\partial w}\\C_2&=\mu_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial u}+\mu_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial v}+\mu_3\frac{\partial\overline{T}}{\partial w}\\C_3&=\nu_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial u}+\nu_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial v}+\nu_3\frac{\partial\overline{T}}{\partial w}\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

$$\left.\begin{aligned}C_4&=\lambda_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial p}+\lambda_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial q}+\lambda_3\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+\beta\,C_3-\gamma\,C_2\\C_5&=\mu_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial p}+\mu_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial q}+\mu_3\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+\gamma\,C_1-\alpha\,C_3\\C_6&=\nu_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial p}+\nu_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial q}+\nu_3\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+\alpha\,C_2-\beta\,C_1\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

---

*) Skrz $\varphi=\varphi_1u+\varphi_2v+\varphi_3w+\varphi_4p+\varphi_5q+\varphi_6r$; viz § 24. a rovn. (28) pag. 71.

Tyto hodnoty třeba zavésti do rovnic (41, 42) a je dále transformovati. Jsou-li accelerující síly na systému působící nullou, budou $C_1 \ldots C_6$ veličinami stálými. *Výslednice impulsivných sil je pak v každém okamžiku stálá a má směr týž. Totéž platí o výsledném statickém momentu a ose jeho procházející pevným bodem prostorovým.*

Rovnice (45) a (46) obsahující šest konstant jsou úplnými integrály rovnic (40) a (39) v nepřítomnosti zevních sil. Přesvědčíme se o tom ostatně přímo, derivujeme-li rovnice (45) dle t, násobíme-li výsledek na λ_i, μ_i, ν_i, kdež $i = 1, 2, 3$, a utvoříme-li součet. Při redukci jest přihlížeti k (39^a). Podobně jest jednati s rovnicemi (46).

§ 36. ***Differenciálné rovnice pro pohyb rotačního tělesa v nepřítomnosti zevních sil vůbec.*** Osou rotační zároveň osou symmetrie budiž osa z s tělesem pevně spojená; zároveň připouštíme možnost otvoru k ní rovněž symmetrického. Jde tedy o „prsten" s perforací ve směru osy symmetrie. Z důvodů souměrnosti lze tu čistý cyklický pohyb vzbuditi impulsivnými silami na tělese a barrieře, jichž výslednice jde ve směru osy z, tak že z veličin $\overline{X} \ldots \overline{M}_z$ jest jen $\overline{Z}$ od nully rozdílné; tudíž bude pro *určitý**) s tělesem pevně spojený systém analogicky dle (23 kap. IV):

$$\overline{T} = T_0 + \Theta + \overline{Z}w = \tfrac{1}{2}Cw^2 + \tfrac{1}{2}B(u^2+v^2) + \tfrac{1}{2}Rr^2 + \tfrac{1}{2}P(p^2+q^2) + \overline{Z}w. \quad (46^a)$$

Rovnice (40) a (39) dávají:

$$\left.\begin{aligned}
&B\frac{du}{dt} + q(\overline{Z} + Cw) - rvB = 0\\
&B\frac{dv}{dt} + ruB - p(\overline{Z} + Cw) = 0\\
&C\frac{dw}{dt} + (pv - qu)B = 0\\
&P\frac{dp}{dt} + v(Cw + \overline{Z}) - wvB + qr(R - P) = 0\\
&P\frac{dq}{dt} + wuB - u(Cw + \overline{Z}) + rp(P - R) = 0\\
&R\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{či} \quad r = const
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

*) Počátek tohoto *určitého* s tělesem pevně spojeného systému $Oxy\mathfrak{z}$ budeme na příště zváti „centrem" tělesa. U rotačního ellipsoidu se hmotou stejnoměrně rozdělenou jest „centrum" identické s centrem geometrickým.

Násobíme-li prvých pět rovnic (47) po sobě na u, v, w, p, q, sečteme a integrujeme, obdržíme:

$$B(u^2 + v) + Cw^2 + P(p^2 + q^2) = C_7 \qquad (48)$$

Rovnice jest výrazem konstance kinetické energie $T_0 + \Theta + K$ a plyne přímo z výrazu pro $T_0 + \Theta$ v (46[a]), uvážíme-li, že cyklická část její K jest o sobě stálou.

Umocníme-li rovnice (45) a sečteme, přijdeme ku:

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial w}\right)^2, \qquad (49)$$

neb v našem případě ku:

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = B^2(u^2 + v^2) + (Cw + \overline{Z})^2 \qquad (49^a)$$

Rovnice (49[a]) vyjadřuje konstanci výslednice impulsivných sil.

Násobíme-li konečně rovnice (46) po sobě na C_1, C_2, C_3 a sečteme, najdeme se zřetelem na (45):

$$C_1C_4 + C_2C_5 + C_3C_6 = \frac{\partial \overline{T}}{\partial u}\frac{\partial \overline{T}}{\partial p} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial v}\frac{\partial \overline{T}}{\partial q} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial w}\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \qquad (50)$$

Tato rovnice vyjadřuje větu, že úhel mezi výslednicí impulsivných sil a osou jejich výsledného momentu jest veličinou stálou.

V našem případě máme:

$$BP(up + vq) + Rr(Cw + \overline{Z}) = C_1C_4 + C_2C_5 + C_3C_6 \qquad (51)$$

Třetí rovnici (47) pišme ve formě:

$$\frac{C^2}{B^2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = (p^2 + q^2)(u^2 + v^2) - (pu + vq)^2 \qquad (52)$$

Pomocí (48) (49[a]) (51) lze pravou stranu v (52) vyjádřiti proměnnou w a uvésti (52) na tvar differenciálu elliptické transcendenty:

$$dt = \frac{dw}{\sqrt{a_0 + a_1w + a_2w^2 + a_3w^3 + a_4w^4}} \qquad (53)$$

Integrací, *Greenhillem* pro necyklický pohyb úplně provedenou (viz *Basset* I. pag. 260), najdeme w jakožto úkon časový a podobně dle rovnic (48) (49[a]) a (51) $u^2 + v^2$, $p^2 + q^2$, $up + vq$. Místo tohoto postupu odporučuje se přímý výpočet úhlů. Systém x', y', z' v prostoru pevný nevolíme za tím účelem

nahodile, nýbrž přiměřeně podmínkám úlohy, kladouce prostorovou osu z' *parallelně* k výsledné impulsivné síle (je-li tato od nully rozdílnou), tak že jest $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ a $C_3 \gtrless 0$ samo již výslednicí sil impulsivných.

Promítnutím*) síly C_3 na osy x, y, z obdržíme:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial w} = Cw + \overline{Z} = C_3 \cos \vartheta, \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial v} = Bv = C_3 \sin \vartheta \sin \chi,$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial u} = Bu = - C_3 \sin \vartheta \cos \chi, \tag{54}$$

pak:

$$u = - \frac{C_3}{B} \sin \vartheta \cos \chi, \quad v = \frac{C_3}{B} \sin \vartheta \sin \chi, \quad w = \frac{C_3 \cos \vartheta - \overline{Z}}{C} \tag{55}$$

Ze vztahů $\frac{\partial \overline{T}}{\partial p} = Pp$, $\frac{\partial \overline{T}}{\partial q} = Pq$, $\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} = Rr$ a po dosazení hodnot $u\,v\,w$ z rovnic (55) do obou rovnic (48), (51) obdržíme v další úvaze, že dle (37) jest

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \sin^2 \vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

pak $\quad up + vq = \frac{C_3}{B} \sin \vartheta \,(q \sin \chi - p \cos \chi) = \frac{C_3}{B} \frac{d\omega}{dt} \sin^2 \vartheta,$

tyto relace a sice:

z (51):
$$P \frac{d\omega}{dt} = \frac{C_6 - Rr \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \tag{56}$$

z (48):

$$\left(P \frac{d\omega}{dt} \sin \vartheta\right)^2 . \frac{1}{P} + P \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{C_3^2}{B} \sin^2 \vartheta + \frac{(C_3 \cos \vartheta - \overline{Z})^2}{C} = C_7 \tag{57}$$

pak z (56, 57):

$$P \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C_7 - \frac{(C_3 \cos \vartheta - \overline{Z})^2}{C} - \frac{C_3^2}{B} \sin^2 \vartheta - \frac{(C_6 - Rr \cos \vartheta)^2}{P . \sin^2 \vartheta} \tag{58}$$

Z rovnice (58) lze najíti integrací ϑ, z rovnice (56) ω, z třetí rovnice (37) χ.

Z rovnic (46) lze určiti α, β; zavedeme-li tu za $\frac{\partial \overline{T}}{\partial p}$, $\frac{\partial \overline{T}}{\partial q}$, $\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}$

---

*) C_3 promítneme na $O\zeta$, pak na OII (viz obr 4.) a toto na Ox a Oy.

hodnoty jejich, položíme-li $C_1 = C_2 = 0$, a píšeme-li zkráceně
$p\lambda_1 + q\lambda_2 = p'$, $p\mu_1 + q\mu_2 = q'$, $p\nu_1 + q\nu_2 = r'$, vyjde

$$\left.\begin{aligned} C_4 &= Pp' + \lambda_3 Rr + \beta C_3 \\ C_5 &= Pq' + \mu_3 Rr - \alpha C_3 \\ C_6 &= Pr' + \nu_3 Rr \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Veličiny $p' q' r'$ jsou patrně projekce obou ang. rychlostí $p q$, a $\lambda_3 r$, $\mu_3 r$, $\nu_3 r$ projekce angulárné rychlosti r na osy skrz „centrum" rovnoběžně vedené ku x', y', z'.

Rychlosti p a q lze nahraditi angulárnými rychlostmi kol OI a OII (obr. 4.):

$$OI = q \cos\chi + p \sin\chi = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$OII = q \sin\chi - p \cos\chi = \frac{d\omega}{dt} \sin\vartheta \quad \text{(viz 37)} \qquad (60)$$

Rychlost OI se promítá přímo na osy x', y'; protože svírá s osou y' úhel ω, s osou x' $\sphericalangle 90^0 + \omega$, s osou z $\sphericalangle 90^0$, budou příspěvky od OI ku p', q', r' po sobě rovny:

$$-\frac{d\vartheta}{dt} \sin\omega, \quad \frac{d\vartheta}{dt} \cos\omega, \ 0.$$

Rychlost kol OII rozložme na složku $OII \sin\vartheta$ dle Oz' a na složku $OII \cos\vartheta$ dle směru OII' [v obrazci (4) nekresleného], jenž jest průmětem čáry OII na rovinu $x'y'$ a stoje na OI kolmo svírá s y' $\sphericalangle 90^0 + \omega$, s osou x' $\sphericalangle 180^0 + \omega$. Příspěvky k p', q', r' jsou

$$OII \cos\vartheta \cos(180^0 + \omega), \quad OII \cos(90^0 + \omega) \cos\vartheta, \quad OII \sin\vartheta.$$

Konečně jest $\lambda_3 r = r \sin\vartheta \cos\omega$, $\mu_3 r = r \sin\vartheta \sin\omega$, $\nu_3 r = r \cos\vartheta$.

Tím obdržíme

$$\left.\begin{aligned} p' &= -\frac{d\vartheta}{dt} \sin\omega - \frac{d\omega}{dt} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\omega, \\ q' &= \frac{d\vartheta}{dt} \cos\omega - \frac{d\omega}{dt} \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\omega, \quad r' = \frac{d\omega}{dt} \sin^2\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

pak z (59):

$$\left.\begin{aligned} \alpha C_3 + C_5 &= P\frac{d\vartheta}{dt} \cos\omega + \sin\vartheta \sin\omega \left(Rr - P\frac{d\omega}{dt} \cos\vartheta\right) \\ -\beta C_3 + C_4 &= -P\frac{d\vartheta}{dt} \sin\omega + \sin\vartheta \cos\omega \left(Rr - P\frac{d\omega}{dt} \cos\vartheta\right) \\ C_6 &= Rr \cos\vartheta + P \sin^2\vartheta \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

K vůli pozdější potřebě podotkněme, že rovnice (62) jsou při $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ platné při kterékoli poloze systému x', y', z'.

Z prvých dvou rovnic (62) lze najíti α, β, neboť C_4, C_5, C_6 jsou veličiny dané. Konečně se najde γ neb lépe řečeno $\frac{d\gamma}{dt}$ v úvaze, že jest průmětem rychlostí u, v, w na Oz', tedy ze vztahu:

$$\frac{d\gamma}{dt} = w \cos \vartheta + OII \sin \vartheta,$$

kdež $OII = v \sin \chi - u \cos \chi$ jest rychlost dle směru OII (viz 38[a]; rychlost OI ničím nepřispívá ku $\frac{d\gamma}{dt}$).

Dosazením z (55) najde se:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{C_3 \cos \vartheta - \overline{Z}}{C} \cos \vartheta + \frac{C_3}{B} \sin^2 \vartheta \qquad (63)$$

Ze souřadnicového systému v prostoru pevného byl pouze definován *směr* a nikoli *poloha* osy z'. Tuto můžeme určiti v úvaze, že statické momenty příslušné pevným osám x', y', z' se při *těchže daných silách* změní, jestliže soustavu souřadnicovou parallelně k sobě posuneme. Můžeme dokonce spůsobiti, že jen moment osy z' jest od nully rozdílným. Tak na př. můžeme v (46), jsou-li $C_4 C_5 C_6$ v jednom souřadnicovém systému známy, zpět pošinutím systému dle os x', y' o a, b souřadnice centra tělesa α i β zvětšiti o a, b. Příslušný statický moment C_4, C_5 přejde tu v $C'_4 = C_4 + bC_3$ $C'_5 = C_5 - aC_3$ a při $C_3 \gtrless 0$ lze a i b tak zvoliti, že jest C'_4, C'_5 v tomto novém systému nullou. Necháme-li (62) platiti pro tento systém, musíme C_5 a C_4 položiti nullou.

Zbývá ještě na ose z' vhodně voliti *počátek* systému $x'y'z'$ a směr osy x'. Lze toho následovně docíliti. V čase $t = 0$ nechť se těleso v *dané* poloze uvede do pohybu impulsivnou silou S skrz „centrum“ jeho a dvojicí, tak že v $t = 0$ jsou známy hodnoty $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$. Rovina skrz S a rotační osu budiž volena rovnoběžně k rovině $x'z'$. Tím jest ustanoven směr osy x' a následkem toho jest v čase $t = 0$ též $\overline{\omega} = 0$ (viz obr. 4.), protože rotační osa Oz leží v rovině $Ox'z'$. Současně jest i $\overline{\chi} = 0$, volíme-li v tělese za osu y-ovou tu, která v čase $t = 0$ koinciduje s kolmicí k ro-

vině položené skrz S a rotační osu. Z (62) najdeme k času $t=0$ příslušné α, β, totiž:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\alpha C_3} &= P\overline{\frac{d\vartheta}{dt}} = P\overline{q} \\ \overline{\beta C_3} &= -Rr\sin\overline{\vartheta} + P\cos\overline{\vartheta}\sin\overline{\vartheta}\,\overline{\frac{d\omega}{dt}} = -Rr\sin\overline{\vartheta} - P\overline{p}\cos\overline{\vartheta} \\ &\qquad\qquad (\text{viz } 37) \\ C_6 &= Rr\cos\overline{\vartheta} - P\overline{p}\sin\overline{\vartheta} \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Patrně jest $\overline{\vartheta}$, úhel mezi silou S a rotační osou v čase $t=0$, veličina daná. Z (64) najdeme tedy polohu našeho karakteristického systému $x'y'z'$, $C_4=0$ $C_5=0$, vůči *dané* poloze tělesa v čase $t=0$, ustanovíme-li ještě $\overline{\gamma}=0$ při $t=0$.

Konečně lze pomocí poslední rovnice (64) místo (56) položiti

$$P\frac{d\omega}{dt} = \frac{Rr(\cos\overline{\vartheta} - \cos\vartheta) - \sin\overline{\vartheta}\,P\overline{p}}{\sin^2\vartheta} \qquad (65)$$

§ **37.** ***Speciálné případy.*** Nejnesnadnější částí počtu jest integrace rovnice (58). Z toho důvodu chceme se zabývati úlohami zjednodušenými.

A) *Výsledná impulsivná síla jest nullou.*

Tento v předchozím vyjmutý případ vyžaduje úvahy zvláštní. Máme: $C_1=C_2=C_3=0$ a také $\partial\overline{T}/\partial u = \partial\overline{T}/\partial v = \partial\overline{T}/\partial w = 0$, pak $u=v=0$, $w=-\overline{Z}/C$; viz (45) a (55).

Z rovnice (48) jde

$$p^2+q^2 = const = \dot{\omega}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2 \text{ (dle 37)} \qquad (66)$$

Volíme-li osu z' parallelně k ose výsledného momentu, který má nyní povahu dvojice, tedy $C_4=C_5=0$, obdržíme z (62)

$$\frac{d\vartheta}{dt}=0, \quad Rr = P\frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta.$$

Rotační osa svírá tudíž s osou výsledné dvojice stálý úhel ϑ a má kol ní konstantní praecesní pohyb o rychlosti $\frac{d\omega}{dt}=\frac{Rr}{P\cos\vartheta}$.

Z rovnic (37) a odtud jde

$$p=-tg\,\vartheta\cos\chi\frac{Rr}{P}, \quad q=tg\,\vartheta\sin\chi\frac{Rr}{P}, \quad r=\frac{d\chi}{dt}+\frac{Rr}{P} \qquad (67)$$

Promítnutím stálé rychlosti $w = -\frac{\overline{Z}}{C}$ na osy prostorové obdržíme pro rychlost „centra“:

$$\frac{d\gamma}{dt} = w \cos \vartheta, \quad \frac{d\alpha}{dt} = w \sin \vartheta \cos \chi, \quad \frac{d\beta}{dt} = w \sin \vartheta \sin \chi \quad (68)$$

Úhel χ roste úměrně s časem dle vzorce

$$\chi = tr\left(1 - \frac{R}{P}\right) + const,$$

poslední dvě rovnice (68) dají se tudíž snadno integrovati a učí, že projekce „centra tělesného“ na prostorově pevnou rovinu $x'y'$ opisuje kružnici a protože těleso postupuje dle osy z' se stálou rychlostí $w \cos \vartheta$, opisuje „centrum“ šroubovou závitnici. Co do detailů budiž uvedeno následující. Vzbuďme v čase $t = 0$, napřed impulsem na barrieru tělesa (vlastně prstenu) čistý cyklický pohyb, při kterém se tekutina skrz prsten v jistém směru pohybuje.

Po odstranění barriery udělme prstenu samému v protivném směru impuls stejně veliký. Výsledný impuls jest pak nullou. Na to uveďme jej impulsivně do rotace dvojicí kolem osy rotační a porušme dosud panující symmetrii pohybu dvojicí impulsivnou kolem průměru prstenového jdoucího centrem. Tato a předchozí dvojice dají výslednou dvojici, jejížto osa centrem tělesa procházející ustanovuje osu Oz'. Centrum samo volme za počátek. Rovina skrz Oz' a osu rotační budiž rovinou $Oz'x'$. Za osu y' volíme kolmici skrz centrum a za osu y-ovou (s tělesem pevně spojenou) tu, která v čase $t = 0$ splývala s y'. Patrně jest pak při $t = o$: $\omega = 0$, $\chi = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Integrace rovnic (68) dává:

$$\alpha = \frac{w \sin \vartheta}{\dot{\chi}} \sin \chi + \alpha_0, \quad \beta = -\frac{w \sin \vartheta}{\dot{\chi}} \cos \chi + \beta_0,$$

při čemž $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = \frac{w \sin \vartheta}{\dot{\chi}}$ býti musí. Tím jest ustanoven střed kruhu $\left(\text{ležící na ose } y' \text{ v distanci radia } \frac{w \sin \vartheta}{\dot{\chi}} = \frac{w \sin \vartheta}{r\left(1 - \frac{R}{P}\right)}\right)$ jímž osa šroubové závitnice prochází. Příčinou pohybu šroubo-

vého jest cirkulace; neboť při $\overline{Z} = 0$ jest $w = 0$ a centrum zůstává na místě.

Je-li $r = 0$, jest $\vartheta = 90^0$ (osa z' padá v čase $t = 0$ do průměru prstenového). Veličiny pq vyskytují se v (67) ve formě neurčité $0 . \infty$. Z čtvrté a páté rovnice (47) najdeme pomocí $r = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $Cw + \overline{Z} = 0$, že p i q tedy dle (66), že i $\dot{\omega}$ stálým jest. Představme si prsten vertikálně, tak že osou imp. dvojice kol z' jest vertikálný průměr. Osa rotační čili z bude pak skrz $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ vždy obsažena v rovině vodorovné. Zvolíme-li za osu y-ovou (s prstenem pevně spojenou) tu, která v čase $t = 0$ splývala s osou dvojice, bude v $t = 0$, tudíž vždy $p = 0$ a q stálé. Prsten se tudíž točí trvale kol vertikálné osy. Skrz $cos\, \vartheta = O$ jest dle (68) $d\gamma / dt = o$, dle (37) $\dot{\chi} = o$, bude tedy „centrum“ opisovati přímku kolmou na ose dvojice.

B) Podmínky stability pro těleso postupující směrem osy symmetrie. Rotačnímu tělesu udělíme angulárnou rychlost r kol osy symmetrie a pak impuls směrem téže osy. Jest o sobě již jasno, že může směrem jejím postupovati stálou rychlostí w. Skutečně vyhovuje $u = 0$, $v = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $w = const$, $r = const$ rovnicím (47). Stabilitu pohybu vyšetříme vyhledáním podmínek, za kterých u, v, p, q trvale velmi malými zůstati mohou, jestli jimi kdysi byly. Při tomto předpokladu jest dle třetí rovnice (47) $\frac{dw}{dt}$ nullou, tedy w stálým až na veličiny druhého řádu.

Všechny ostatní rovnice (47) jsou pak lineárné a jejich řešení snadno možné. Zde použijeme s výhodou výsledků již nalezených. Rovnoměrný postupný pohyb tělesa dle osy z představme si v čase $t = 0$ porušen nad míru slabou impulsivnou *dvojicí* o ose kolmé, kterou volíme za osu Oy, tak že jest v čase $t = 0$: $p = \overline{p} = 0$ $\vartheta = \overline{\vartheta} = 0$. Jelikož osa rotační (osa z) a směr výsledné impulsivné síly volený za osu z' v tomto případě koincidují ($\overline{\vartheta} = 0$), zvolíme polohu prostorově pevné osy y' rovnoběžně k poloze osy y-ové v čase $t = 0$. Pak jest při $t = 0$ $\overline{p} = 0$, $\omega = 0$ a $\frac{d\vartheta}{dt} = \overline{q}$, $\overline{\vartheta} = \vartheta = 0$. Dle třetí rovnice (64) jest $C_6 = Rr$, tedy $C_6 - Rr\, cos\, \vartheta = Rr\, (1 - cos\, \vartheta)$.

Rovnici (58) derivujme dle t a považujme ϑ za velmi malé v souhlase s předpokladem, že porušený pohyb jest *stabilním.*

Tím obdržíme:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -h^2\vartheta;\ h^2 = \frac{1}{4BCP}\left[r^2 \frac{R^2}{P} BC + 4C_3^2(C-B) + 4C_3 B\overline{Z}\right] \quad (69)$$

Odtud plynou následující výsledky:

1. Je-li cyklický pohyb nullou ($\overline{Z} = 0$) a zároveň $C > B$, bude původní pohyb *vždy* stabilní, neboť faktor h^2 u ϑ v rovnici (69) jest kladný, tudíž úhel ϑ funkcí časově periodickou. Jestliže bylo ϑ kdysi velmi malým, zůstane jím [dle (71)] vždy.

2. Je-li ale při $\overline{Z} = 0$ $C < B$, jest pohyb jen tehdy stabilním, jestliže těleso tak rychle rotuje, že:

$$r^2 > \frac{4w^2C(B-C)P}{BR^2} \quad (70)$$

Dle (46[a]) jest C dvojnásobnou kinet. energií tekutiny a tělesa, postupuje-li toto bez točení rychlostí $= 1$ dle osy symmetrie, B podobným výrazem, postupuje-li těleso *kolmo* k ní rychlostí $= 1$. Je-li M hmotou tělesa, jest $C - M$ energií *tekutiny* samé v případě prvém, a $B - M$ v případu druhém. Podmínka $C - B > 0$ neb $C - M - (B - M) > 0$ vypovídá tudíž, že kinetická energie tekutiny v prvém případě má větší býti nežli v případě druhém, a jest splněna na př. u sploštělého ellipsoidu rotačního (třeba u kruhové desky), nikoli však u podlouhlého ellipsoidu (tedy na př. u tyče). Postup desky ve směru osy symmetrie bude tudíž stabilním, tyče však v nepřítomnosti rotace labilním, může se však státi následkem rotace stabilním, je-li splněna podmínka (70). Podlouhlý projektil vystřelený z taženého děla má následkem toho stabilní pohyb.

3. Existence cyklického pohybu $\overline{Z}$ zvyšuje stabilitu při ($w+$), ($\overline{Z}+$), potažmo zmenšuje labilitu; při ($\overline{Z}-$), ($w+$) jest to naopak.*) Jest zajímavo, vyšetřiti hlavní detaily porušeného pohybu stabilního.

Rovnici (69) splňuje při podmínkách $\omega = 0$ $\vartheta = 0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \overline{q}$ v čase $t = 0$ integrál:

$$\vartheta = \frac{\overline{q}}{h} \sin ht \quad (71)$$

*) V případě prvém koinciduje pohyb tělesa do předu s pohybem tekutiny následkem cyklosy uvnitř prstenu, v druhém naopak.

Z (56) jde:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Rr}{P} \frac{1 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \frac{Rr}{2P} \text{ (přibližně), tedy } \omega = \frac{Rrt}{2P} \quad (71^a)$$

Z rovnic (62), v nichž klademe $C_4 = C_5 = 0$ (zvolivše vhodně *polohu* osy z', jejíž *směr* impuls. silou ustanoven byl), jde pomocí (71^a):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha C_3}{P} &= \frac{Rr}{2P} \sin\omega \, . \, \vartheta + \cos\omega \frac{d\vartheta}{dt} \\ -\frac{\beta C_3}{P} &= \frac{Rr}{2P} \cos\omega \, . \, \vartheta - \sin\omega \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned} \right\} . \quad (72)$$

Osa rotační opisuje tudíž dle (71) a (71^a) kolem směru impulsu (osy z') kužel, jehož rovnice jest:

$$\vartheta = \frac{\bar{q}}{h} \sin \frac{h \, . \, 2P}{Rr} \omega \quad (72^a)$$

Postupuje-li ω od nully přes 2π, 4π ... do ∞, roste ϑ od nully do kladného maxima, vrátí se k nulle, stane se záporným, dosáhne maxima záporného, vrátí se k nulle atd. Schematicky jest řídící křivka kužele opisovaného rotační osou tělesa zobrazena ve figuře (5). (Konické kývání osy projektilu.)

Méně přehlednou jest křivka, kterou opisuje průmět „centra" na rovinu $x'y'$ (kolmou na „impulsu").

Píšeme-li $\omega = \frac{Rr}{2P} t = h_0 t$, dají se α i β v (72) vyjádřiti součtem dvou periodických úkonů o periodách

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{h_0 - h}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{h + h_0}.$$

Máme totiž:

$$\alpha \, . \, \frac{2C_3 h}{P\bar{q}} = (h + h_0) \cos (h_0 - h) \, t - (h_0 - h) \cos (h_0 + h) \, t$$

$$\beta \, . \, \frac{2C_3 h}{P\bar{q}} = (h + h_0) \sin (h_0 - h) \, t - (h_0 - h) \sin (h_0 + h) \, t$$

Výsledný pohyb jest týž, jaký vzniká při superposici dvou cirkulárných pohybů rozličné amplitudy a periody. Při tom postupuje „centrum" dle (63) podél osy z' přibližně stálou rychlostí

$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{C_3-\overline{Z}}{C}$. Výsledný pohyb jeho děje se tudíž dle komplikované závitnice šroubové. Významný systém x', y', z' jest dle (64) vůči tělesu v čase $t=0$ tak položen, že jest $\overline{\alpha}=\frac{P\overline{q}}{C_3}$, $\overline{\beta}=0$.

Netočí li se těleso kolem osy symmetrie ($r=0$), jest dle (71^a) $\omega=0$ a dle (72) a (71) $\beta=0$, $\alpha=\frac{P}{C_3}\dot{\vartheta}=\frac{P}{C_3}\overline{q}.\cos ht$, osa symmetrie zůstává trvale v *téže* rovině $x'z'$, pohyb vzniklý nekonečně malým porušením stabilního pohybu jest co do ϑ časově periodický a při tom pohybuje se „centrum" tělesa periodicky na levo a na pravo dle zákona $\alpha=\frac{P}{C_3}\overline{q}\cos ht$, postupujíc zároveň rychlostí $\dot{\gamma}$ přibližně stálou a udanou rovnicí (63) dle osy z'. Podobný zjev vidíme, když téměř horizontálně držený kruhový papírový list k zemi pustíme. Tíže hraje tu úlohu impuls. síly.

C) Osa rotační zůstává v téže rovině.

Rotační těleso budiž v pohyb uvedeno okamžitou silou C_3, která jde centrem a svírá s osou symmetrie úhel $\overline{\vartheta}$, pak okamžitým momentem kol osy kolmé k rovině síly C_3 a osy rotační. Zde jest $r=0$, a v čase $t=0$: $\omega=0$, $\frac{d\vartheta}{dt}=\overline{q}$, $\overline{p}=0$. Z (64) jde $C_6=0$, z (65) $\dot{\omega}=0$ a $\omega=0$, z (62) $\beta=0$ a $\alpha=\frac{P}{C_3}\frac{d\vartheta}{dt}$.*) Osa symmetrie zůstává pak v téže rovině ($\beta=0$).

Z (58) jde

$$P\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=C_7-(C_3\cos\vartheta-\overline{Z})^2\frac{1}{C}-\frac{C_3^2}{B}\sin^2\vartheta \qquad (73)$$

nebo derivuje-li se dle t

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{C_3^2}{P}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)-\overline{Z}.\frac{C_3}{CP}\sin\vartheta \qquad (74)$$

Konstanta C_7 v (73) určí se z podmínek v čase $t=0$ a jest

$$C_7=P\overline{q}^2+(C_3\cos\overline{\vartheta}-\overline{Z})^2\frac{1}{C}+\frac{C_3^2}{B}\sin^2\overline{\vartheta}$$

Rovnice (73) i (74) lze ostatně přímo odvoditi.

Průmět imp. síly C_3 na osy Oz a Ox jest $C_3\cos\vartheta=Cw+\overline{Z}$;

*) Za takové *polohy* osy ζ', při níž jest $C_5=C_4=0$.

$-C_3 \sin\vartheta = Bu$. Z principu energie (rovn. 48) vychází pak bezprostředně (73), neboť $v=0$, $p=0$, $q=\frac{d\vartheta}{dt}$.

Promítnutím rychlostí u i w na osy Ox', Oz' obdržíme $\alpha = w \sin\vartheta + u \cos\vartheta$ neb po dosazení hodnot u, w, a dle (74) $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{P}{C_3}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, což jest identické s výsledkem dřívějším. Dále je

$$\frac{d\gamma}{dt} = w \cos\vartheta - u \sin\vartheta = \frac{C_3 \cos^2\vartheta}{C} + \frac{C_3 \sin^2\vartheta}{B} - \frac{\cos\vartheta\, \bar{Z}}{C} \text{*)} \qquad (75)$$

V rovnici (73) jest pravá strana dle $\cos\vartheta$ formou kvadratickou, která anullována má buď oba kořeny $\cos\vartheta$ reálné neb oba soujemné.

Jsou-li soujemné, není reálného ϑ, pro které by $\frac{d\vartheta}{dt}$ bylo nullou; následkem toho nezmění $\dot{\vartheta}$ nikdy své znamení a těleso bude kol osy y-ové s ním pevně spojené rotovati neustále v témže směru s maximy a minimy angulárné rychlosti.

V (75) lze dvojmoci cosinu i sinu vyjádřiti cosinem dvojnásobného ϑ, jest tedy $\dot{\gamma}$ složeno z části stálé a periodicky proměnlivé. Totéž platí o $\frac{d\alpha}{dt}$, jen že při $\bar{Z}=0$ stálý člen schází, neboť jest

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{P}{C_3}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \sin\vartheta \left[\cos\vartheta\, C_3 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) - \frac{\bar{Z}}{C} \sin\vartheta\right] \qquad (76)$$

Celkem bude těleso, rotujíc kol osy y-ové, postupovati směrem výsledného impulsu a to rychlostí periodicky proměnlivou a v nepřítomnosti cyklosy ($\bar{Z}=0$) se periodicky na příč pohybovati mezi maximy a minimy veličiny α, k nimž příslušné ϑ udáno jest rovnicí (74).

Oscillatorný průběh veličiny ϑ vyžaduje, aby pro jisté reálné ϑ bylo $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, tedy kořeny reálné. Z těchto může však jen jeden kořen $\cos\vartheta$ býti numericky menší nežli jednička, neboť jinak by existovaly *čtyry* úhly ϑ, při nichž se angulárná rychlost nulle

*) Toto odvození vzorců podržuje svou platnost pro těleso o *jedné* rovině symmetrie $x\mathfrak{z}$, uvedeme-li je tak v pohyb, že rovina symmetrie nemá pohybu směrem vlastní normály ($p=0$ $q=0$ $v=0$). Kinetická energie Θ redukuje se tu na členy u^2, w^2, uw, q^2, z nichž faktor při uw vhodnou volbou počátku souřadnicového odstraniti lze. Cyklosu v tomto případě arciť nepředpokládáme.

rovná, což není možná (ke každému cosinu náleží dva úhly, kladný i záporný).

Další možné subspecialisace jsou tyto. Prsten (rotační těleso) byl původně v klidu a kol něho panoval cyklický pohyb tekutiny. Tento stav se poruší impulsivnou dvojicí kol osy y-ové. Zde jest $C_3 = \overline{Z}$, $\overline{\vartheta} = 0$, tedy dle (48) $C_7 = Pq^2$. Všeobecný typus pohybu byl již vytknut: prsten buď rotuje aneb oscilluje co do angulárné své posice. Periodu oscillace neb rotace lze vyjádřiti elliptickými transcendentami (Basset I.).

Druhá specialisace jest $\overline{Z} = o$, tedy cyklosa nulle rovná. Tehdy jest dle (74) $\frac{d^2(2\vartheta)}{dt^2} = -\frac{C-B}{CB} \cdot \frac{C_3^2}{P} \sin 2\vartheta$. Předpokládejme ještě $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ v čase $t = 0$. Průběh veličiny ϑ lze tu porovnati s pohybem obyčejného kyvadla, na př. hmotného bodu na tuhé bezvážné tyči. Vychýlíme-li je o úhel $2\overline{\vartheta}$ z polohy vertikálné, a je-li okamžitou úchylkou jeho 2ϑ, bude:

$$\frac{d^2(2\vartheta)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin 2\vartheta.$$

Kdybychom téměř vertikálně držené tenké desce kruhové ($C > B$) (viz obr. 6.) udělili impuls svisle dolů čelící (jest to směr osy z'), bude počáteční odklon osy symmetrie od osy z': $\overline{\vartheta} = 90^0 - \varepsilon$, kdež ε jest úhlem velmi malým. Odchylka $2\overline{\vartheta}$, která kyvadlu přísluší, jest skoro 180^0, to jest kyvadlo je do výše vychýleno přibližně o 180^0, bude tedy, jsouc puštěno, padati a 2ϑ bude nabývati po sobě hodnot: $180^0 - 2\varepsilon$, 90^0, 0^0, -90^0, $-(180^0 - 2\varepsilon)$, -90^0, 0^0, 90^0, $(180^0 - 2\varepsilon)$. Následkem toho bude ϑ u desky míti po sobě hodnoty $90 - \varepsilon$, 45^0, 0, -45^0, $-(90^0 - \varepsilon)$, -45^0, 0^0, 45^0, $90^0 - \varepsilon$. Příslušné α jde ze vztahu $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{P}{C_3} \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ a jest úměrno ku $-\sin 2\vartheta$. Osa z' byla položena dolů, osa x' jde pak na levo, osa y' před rovinu nákresu. Osa symmetrie z, svírající s osou z' úhel $\vartheta = 90 - \varepsilon$, leží v *prvém* kvadrantu, počáteční, skoro vertikálná poloha desky jde pak z leva nahoře na pravo dolů (viz obr. 6.). Centrum desky pohybuje se dolů, svah její se menší až nabude horizontálné polohy ($\vartheta = 0$), při čemž rychlost na pravo se stane nullou. Dosažena tu zároveň největší úchylka na pravo. Odtud stane se ϑ záporným, deska nabývá klesajíc rychlost na levou stranu, její svah se zvětšuje

až do $\vartheta = -(90-\varepsilon)$, a zmenší se zas až na nullu, při čemž centrum desky došlo nejdále na levo atd. První stadia pohybu desky [ve figuře (6) příbližně zobrazeného] lze pozorovati, pustíme-li vertikálně držený papírový list opatrně dolů.

Nebyla-li v čase $t=0$ rychlost $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, musíme si představiti, že v analogii kyvadlovému bodu byla udělena rychlost počáteční. Dle toho, jaký směr a jakou velikost má, bude kyvadlo buď kmitati, nebo do kola rotovati. Jest pak snadno podobným způsobem si znázorniti pohyb desky v tekutině.

D) Jiné spéciálné a jednoduché případy najdeme, když ustanovíme, že v třetí rovnici (47) $pv-qu$ nullou býti má; w se stane stálým a rovnice (47) lineárnými, což právě jest příčinou zjednodušení úlohy.

Jest to možná, je-li

I) $u=0$, $v=0$, II) $p=q=0$, III) $p=fu$, $q=fv$.

V případě I) splníme prvé dvě rovnice (47) buď supposicí $p=q=0$ (a tím jsou i ostatní rovnice splněny), aneb vyhovíme jim kladouce $\overline{Z}+Cw=0$. O obou případech bylo již jednáno.

V případě II) vyhovíme čtvrté a páté rovnici (47) buď supposicí $u=v=0$, což opět není případ nový, aneb položíme-li $Cw+\overline{Z}=Bw$, tak že z prvých dvou rovnic (47) jde $\frac{du}{dt}=-rv$, $\frac{dv}{dt}=ru$, z třetí $w=const.$ Ze stálosti w jde stálost úhlu ϑ, odtud a se zřetelem na $p=q=0$ z rovnic (37) $d\omega/dt=0$ a $\omega=0$, jestliže rovinu $x'z'$ volíme parallelně k rovině skrz rotační osu a směr impulsivné síly. Z třetí rovnice (37) jde $r=\frac{d\chi}{dt}$ a $\chi=rt$. Z rovnic (62) jde: $\alpha=0$, $\beta=-\frac{Rr}{C_3}\sin\vartheta$, z rovnice (63) jde konečně $\frac{d\gamma}{dt}$, které jest stálé. Těleso se pohybuje rovnoběžně ke směru impulsivné síly se stálou rychlostí γ a při tom udržuje skrz $\vartheta=const$, $\omega=0$ rotační osa svůj směr. Šikmé postavení její proti směru pohybu jest tu umožněno rotací r. V nepřítomnosti cyklosy musí, aby spor nevznikl při $C\gtrless B$, w býti nullou.

Je-li konečně v případu III) $p=fu$, $q=fv$ a následkem třetí rovnice (47) $w=const$, tedy plyne z rovnice (48), do níž

za p i q tyto hodnoty dosadíme, že jest stálým výraz $(u^2+v^2)\times(B+Pf^2)$. Ze stálosti impulsivné síly jde skrz $w = const$, též $u^2+v^2 = const'$, tedy jest i f i p^2+q^2 stálé. Ze stálosti w jde stálost ϑ, ze (37) a ze stálosti p^2+q^2 jde stálost $\frac{d\omega}{dt}$. Osa symmetrie opisuje tudíž s konstantní rychlostí kužel kol „impulsu“, svírajíc s ní vždy týž úhel. Z rovnic (62) jde při vhodné volbě *polohy* osy z' $(C_5 = C_4 = 0)$: $\alpha C_3 = \sin\vartheta \sin\omega Rr$, $-\beta C_3 = \sin\vartheta\cos\omega Rr$; ω roste úměrně s časem, průmět „centra“ na $x'y'$ opisuje tudíž kruh. Konečně jest

$$\frac{d\gamma}{dt} = w\cos\vartheta + (v\sin\chi - u\cos\chi)\sin\vartheta = w\cos\vartheta + \frac{1}{f}(q\sin\chi - p\cos\chi)$$

$$= w\cos\vartheta + \frac{1}{f}\cdot\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta$$

veličinou stálou. „Centrum“ tělesa opisuje tudíž šroubovou závitnici.

Většina jednoduchých pohybů zde projednaných byla udána *G. Kirchhoffem* a *W. Thomsonem*. Úlohy *Kirchhoffovy* nevztahují se sice k případům cyklosy, ale lze je v tomto smyslu snadno rozšířiti. Že zejména při „cyklických“ pohybech jde o děje, které se nesnadno zrealisovati dají, netřeba zvláště uváděti.

Kapitola VI.

§ 38. ***Transformace Laplace-ovy rovnice.*** Jisté problémy hydrodynamické vyžadují transformace *Laplace-ovy* rovnice

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

na jiné (všeobecně křivočaré) souřadnice ξ, η, ζ, o kterých předpokládáme, že s *Cartesiovými* x, y, z souvisí pomocí funkcionálných vztahů: $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$. Odtud jde:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}; \quad \text{pak:}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\zeta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta\partial\eta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}.$$

Podobně se tvoří $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$

Zavedeme-li označení:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2=\xi_1,\ \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2=\eta_1,\\
&\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2=\zeta_1,\\
&\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}=N,\ \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}=M,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}=L,\ \Delta\xi=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2},\\
&\text{pak } \Delta\eta,\ \Delta\zeta,
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

bude

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\xi_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\eta_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\zeta_1+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}N+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\zeta}L$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\zeta}M+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Delta\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Delta\eta+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\Delta\zeta \qquad (2)$$

Specialisace.

1. Poloha bodu x, y, z budiž stanovena polárnými souřadnicemi: radiem $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, úhlem ϑ mezi r a osou z, pak úhlem ω mezi rovinou zOx a zOr. Ze vztahů:

$$x=r\sin\vartheta\cos\omega,\quad y=r\sin\vartheta\sin\omega,\quad z=r\cos\vartheta \text{ jde}$$

$$r=\xi=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vartheta=\eta=arc\,tg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\quad \omega=\zeta=arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$

Tím bude: $\xi_1=1$ (skrz $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{x}{r}$ atd.); pak skrz: $\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}=r$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=1 \text{ atd.}\qquad \Delta\xi=\frac{2}{\xi}=\frac{2}{r};$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{zx}{\xi^2\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{zy}{\xi^2\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial\eta}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\xi^2},$$

tedy $\eta_1 = \frac{1}{r^2}$, podobně $\Delta\eta = \frac{1}{r^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0,\quad \zeta_1 = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta},$$

$$\Delta\zeta = 0,\quad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,$$

tedy

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}\frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{2}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{1}{r^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \quad (3)$$

2. Budiž $r = \xi = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, tedy

tedy $\vartheta = \eta = arc\,tg\,\frac{y}{x}$, $z = \zeta$; pak máme dle (2)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (3^a)$$

3. Za jistých okolností bude potenciál φ úkonem jen jedné z křivočarých souřadnic na př. η. Z rovnice (2) jde na místo $\Delta\varphi = 0$

$$\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}} = -\frac{\Delta\eta}{\eta_1} \quad (4)$$

Levá strana jest dle předpokladu úkonem jen η, tudíž i pravá. Této podmínce vyhoví se na př. předpokladem, že potenciál má stejné hodnoty na konfokálných ellipsoidech určených parametrem η pomocí rovnice:

$$\frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1.$$

Derivací nalézáme:

$$\frac{2x}{a^2+\eta} = S\frac{\partial\eta}{\partial x},\quad \frac{2y}{b^2+\eta} = S\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{2z}{c^2+\eta} = S\frac{d\eta}{\partial z},$$

kdež $$S = \frac{x^2}{(a^2+\eta)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\eta)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\eta)^2}.$$

Odtud (viz 1): $\eta_1 = \frac{4}{S}$, pak:

$$\frac{2}{a^2+\eta} - \frac{2x}{(a^2+\eta)^2}\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\cdot S$$

$$+\frac{\partial\eta}{\partial x}\left[\frac{2x}{(a^2+\eta)^2} - 2\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{x^2}{(a^2+\eta)^3} + \frac{y^2}{(b^2+\eta)^3} + \frac{z^2}{(c^2+\eta)^3}\right)\right]$$

a dva podobné výrazy a jejich sečtením

$$2\left(\frac{1}{a^2+\eta} + \frac{1}{b^2+\eta} + \frac{1}{c^2+\eta}\right) = \varDelta\eta\, S \qquad (5)$$

pak místo (4):

$$\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\eta} + \frac{1}{b^2+\eta} + \frac{1}{c^2+\zeta}\right) \qquad (6)$$

a integrací:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{C}{\sqrt{(a^2+\eta)(b^2+\eta)(c^2+\eta)}} \qquad (7)$$

Integrační konstantu C lze určiti z dané normálové komponenty rychlosti na některém místě povrchu ellipsoidu a, b, c, jemuž náleží $\eta = 0$, aneb i z celého „toku“ M z ellipsoidu vycházejícího do nekonečna.

Směrové cosinusy normály v bodě x, y, z libovolného konfokálného ellipsoidu η jsou:

$$\cos nx = \frac{x}{(a^2+\eta)\sqrt{S}}, \quad \cos ny = \frac{y}{(b^2+\eta)\sqrt{S}}, \quad \cos nz = \frac{z}{(c^2+\eta)\sqrt{S}},$$

normálová komponenta rychlosti:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos ny$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos nz = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial\eta}{\partial z}\cos nz\right) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{S}}.$$

Na povrchu $\eta = 0$ jest: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{2C}{abc}\dfrac{1}{\sqrt{S}}$, úhrnný tok $M = \dfrac{2C}{abc}\displaystyle\int\frac{d\omega}{\sqrt{S}}$.

Patrně jest $\dfrac{1}{\sqrt{S}}$ kolmicí spuštěnou s centra souřadnic na tangenciálnou rovinu příslušnou bodu x, y, z na ellipsoidu $\eta = 0$, ku kterému také povrchový element $d\omega$ náleží. Integrál v rovnici pro $\overline{M}$ jest tedy trojnásobným objemem ellipsoidu a $\overline{M} = 8\pi C$.

Ustanoví-li se ještě, že v nekonečnu jest $\varphi = 0$, bude

$$\varphi = \frac{\overline{M}}{8\pi}\int_{\infty}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(a^2+\eta)(b^2+\eta)(c^2+\eta)}} \quad (8)$$

Proudokřivky jsou patrně průsekové čáry konfokálných hyperboloidů.

§ 39. *O sférických funkcích.* Je-li na povrchu koule obsažené v nekonečné tekutině rychlost od místa k místu předepsána, jest potenciál rychlosti všude určen; řešení úlohy dá se úplně provésti pomocí tak zv. sférických funkcí, jimž již vzhledem k četným jejich applikacím v jiných odvětvích mathematické fysiky několik odstavců této kapitoly věnovati míníme. Celá homogenní racionálná forma souřadnic x, y, z: $P = ax + by + cz$ prvého stupně vyhovuje vždy *Laplace-ově* rovnici: $\Delta P = 0$; podobný úkon druhého stupně $P = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ jen tehdy, je-li $a + b + c = 0$.

Máme-li celou rac. homog. formu n-tého stupně o tvaru $P = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + b_1x^{n-1}z + \ldots$ o $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ koefficientech, obdržíme z ní applikací symbolu $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ podobný úkon $(n-2)$-ho stupně, jehož koefficienty jsou složeny z koefficientů formy původní. Má-li *Laplace-ova* rovnice býti splněna pro každé x, y, z, musí z koefficientů derivované formy $n-2$-tého stupně každý o sobě zmizeti. Jelikož jich jest $\frac{n(n-1)}{1.2}$, musí mezi koefficienty původní formy existovati rovněž tolik vztahů.

Odtud jde, že homog. celá rac. funkce n-tého stupně vyhovující *Laplace-ově* rovnici má $\frac{(n+2)(n+1) - n(n-1)}{1.2} = 2n + 1$ koefficientů na sobě nezávislých. Vyjádříme-li v ní souřadnice x, y, z polárnými souřadnicemi, z nichž jednou jest průvodič r z centra souřadnic vedený, kdežto druhé *dvě*: ω, ϑ směr jeho určují, nabude řečená forma tvaru: $r^n Q_n(\omega, \vartheta)$. Úkon $Q_n(\omega, \vartheta)$ zove se celým sférickým úkonem stupně n-tého a to úplným, obsahuje-li všech $2n + 1$ na sobě nezávislých koefficientů.

Věta I. Jsou-li $U = r^n Q_n(\omega, \vartheta)$, $V = r^m Q_m(\omega, \vartheta)$ dva úplné neb neúplné c. r. h. úkony rozličných stupňů n, m a značí-li $d\omega_1$ element tělesného úhlu vedeného z centra souřadnic (tedy element

plochy na kouli o radiu $=1$), jest $\int Q_n \,.\, Q_m d\omega_1 = 0$, vztahuje-li se integrace na celou kouli.

Uvnitř koule o radiu r vyhovuje totiž U i V *Laplace-ově rovnici* a jest zde již dle definice konečným i spojitým. Dle *Greenovy* poučky

$$\int d\tau\,(U\Delta V - V\Delta U) = -\int d\omega_1 r^2\left(U\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial U}{\partial r}\right),$$

v níž jest $d\tau$ elementem prostoru koulí uzavřeného, $d\omega_1 r^2$ elementem jejího povrchu a r směrem normály, bude po dosazení hořejších hodnot U, V

$$0 = (m-n)\int d\omega\; Q_m \,.\, Q_n.$$

Jelikož jest dle předpokladu $m \gtrless n$, lze větu považovati za dokázanou.

Věta II. Je-li celý hom. rac. úkon n-tého stupně U řešením *Laplace-ovy* rovnice, jest jím i $U \,.\, r^{-(2n+1)}$. Patrně jest:

$$\Delta\,(U \,.\, r^\sigma) = r^\sigma \,.\, \Delta U + 2\sigma\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right) r^{\sigma-1} + U\Delta\,(r^\sigma).$$

Prostřední uzávorkovaný výraz lze psáti ve formě

$$\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

neb dle věty o homogenních funkcích ve formě: $\frac{nU}{r}$. Za druhé jest $\frac{\partial\,(r^\sigma)}{\partial x} = \sigma \,.\, r^{\sigma-2} x$; $\frac{\partial^2\,(r^\sigma)}{\partial x^2} = \sigma \,.\, r^{\sigma-2} + \sigma \,.\, (\sigma-2)\, r^{\sigma-4} x^2$ atd., pak $\Delta\,(r^\sigma) = 3\sigma \,.\, r^{\sigma-2} + \sigma\,(\sigma-2)\, r^{\sigma-2}$. Má-li tedy při $\Delta U = 0$ býti $\Delta\,(U \,.\, r^\sigma) = 0$, musí býti $3\sigma + \sigma\,(\sigma-2) + 2n\sigma = 0$ neb $\sigma = -(1+2n)$, q. e. d.

III. *Odvození konečné řady pro sférický úkon v souřadnicích polárných.* Položme:

$$z = r\cos\vartheta,\quad x = r\sin\vartheta\cos\omega,\quad y = r\sin\vartheta\sin\omega.$$

V těchto polárných souřadnicích přejde *Laplace-ova* rovnice pomocí (3) v rovnici:

$$\sin^2\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 P}{\partial\omega^2} + \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right) = 0 \qquad (9)$$

Dosazením: $P = r^n . Q_n(\omega, \vartheta)$ obdržíme pro sférický úkon n-tého stupně (ať celého neb lomeného, kladného i záporného) tuto definitorickou rovnici:

$$n(n+1)\, Q_n \sin^2\vartheta + \frac{\partial^2 Q_n}{\partial\omega^2} + \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right) = 0 \quad (10)$$

Považujeme to však za výhodnější, vlastnosti úkonu Q_n při *kladném a celém n* pokud možná vyvoditi z původní definice jeho nežli z integrace rovnice (10). Dle svého vzniku obsahuje $r^n Q_n(\omega, \vartheta)$ jednotlivé souřadnice $x = r \sin\vartheta \cos\omega$, $y = r \sin\vartheta \sin\omega$ na nejvýš v potenci n-té a totéž platí o $\cos\omega$ i $\sin\omega$.

Se zřetelem na vzorce

$$\cos^p\omega = \left(\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}\right)^p \quad \text{a} \quad \sin^p\omega = \left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\right)^p$$

lze jak $(\cos\omega)^p$, tak $(\sin\omega)^p$ vyjádřiti cosiny i siny úhlů p násobných a nižších. Tudíž lze $r^n Q_n(\omega, \vartheta)$ uvésti na tvar:

$$r^n Q_n(\omega, \vartheta) = r^n \sum_{j=0}^{j=n}\left[\cos(j\omega)\, H_j(\vartheta) + \sin(\omega j)\, G_j(\vartheta)\right] \quad (11)$$

Člen

$$r^n \cos(j\omega)\, H_j(\vartheta) = r^{n-j} . r^j \left[\cos\omega^j - \binom{j}{2}\cos\omega^{j-2}\sin\omega^2 \ldots\right] H_j(\vartheta)$$

jest rovněž rac. hom. cel. úkonem souřadnic x, y, z. Dosadí-li se tu $\cos\omega = \frac{x}{r \sin\vartheta}$, $\sin\omega = \frac{y}{r . \sin\vartheta}$, vznikne v něm jmenovatel $\sin^j\vartheta$, jenž v $H_j(\vartheta)$ nutně obsažen býti musí. Lze tedy klásti $H_j(\vartheta) = \sin^j\vartheta\, h_j(\vartheta)$, a ze zcela podobných důvodů $G_j(\vartheta) = \sin^j\vartheta\, g_j(\vartheta)$. Tedy bude

$$Q_n(\omega, \vartheta) = \sum_{j=0}^{j=n}\left[\cos(j\omega)\, h_j(\vartheta) + \sin(\omega j)\, g_j(\vartheta)\right]\sin^j\vartheta \quad (12)$$

Vlastnosti úkonu $h_j(\vartheta)$ a $g_j(\vartheta)$ lze nyní již snadněji nalézti z differ. rovnice (10). Výrazy $r^n \cos j\omega\, H_j(\vartheta)$ jakož i $r^n \sin(j\omega) G_j(\vartheta)$ mohou jí o sobě vyhověti, je-li v platnosti:

$$\left(n(n+1)\sin^2\vartheta - j^2\right) H_j(\vartheta) + \sin\vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{d H_j(\vartheta)}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) = 0 \quad (13)$$

a podobná rovnice s $G_j(\vartheta)$ místo $H_j(\vartheta)$.

Po substituci za $H_j(\vartheta)$ do (13) máme:

$$\frac{d^2h_j}{d\vartheta^2} \sin^2\vartheta + (2j+1)\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{dh_j}{d\vartheta} + (n-j)(n+j+1)h_j\sin^2\vartheta = 0 \quad (14)$$

Zavede-li se ještě $\cos\vartheta = u$, bude:

$$\frac{d^2h_j}{du^2}(1-u^2) - 2\frac{dh_j}{du}u(j+1) + h_j(n-j)(n+j+1) = 0$$

a podobně:

$$\frac{d^2g_j}{du^2}(1-u^2) - 2\frac{dg_j}{du}u(j+1) + g_j(n-j)(n+j+1) = 0 \quad (15)$$

Rovnice (15) lze integrovati potenční řadou: $h_j = \Sigma a_k \,.\, u^k$. Porovnáním stejně vysokých potencí obdržíme

$$a_{k+2} = -\,a_k\frac{(n-j-k)(n+j+k+1)}{(k+1)(k+2)}.$$

Největší k jest patrně $n-j$, neboť odtud počínaje mizí koefficienty u vyšších potencí tedy napřed u a_{n-j+2}; nejmenší k bude dle vzniku těchto úkonů z celých hom. rac. úkonů buď 1 neb 0. Položíme-li za koefficient u nejvyšší potence s exponentem $n-j$ jedničku, obdržíme řadu ukončenou:

$$q_{n,j} = \cos\vartheta^{n-j} - \cos\vartheta^{n-j-2}\frac{(n-j)(n-j-1)}{2(2n-1)}$$
$$+\cos\vartheta^{n-j-4}\frac{(n-j)(n-j-1)(n-j-2)(n-j-3)}{2\,.\,4(2n-1)(2n-3)} - \text{atd.} \quad (16)$$

Úkony $h_j(\vartheta)$ a $g_j(\vartheta)$ liší se od $q_{n,j}$ jen o arbitrárný faktor. Lze tedy konečně položiti:

$$Q_n(\omega,\vartheta) = \sum_{j=0}^{j=n}\big(A_{jn}\cos(j\omega) + B_{jn}\sin(j\omega)\big)\,q_{nj}\sin\vartheta^j, \quad (17)$$

kdež A_{jn} i B_{jn} jsou konstanty arbitrárné; celkem jest jich $2n+1$.

Zajímavý důsledek plyne z druhé (neb prvé) rovnice (15), jestliže ji dle u derivujeme a za $\frac{dg_j}{du}$ značku Q položíme. Diff. rovnice, jíž tato veličina vyhovuje, jest táž, které vyhovuje g_{j+1}. Odtud jde, že g_{j+1} se od $\frac{dg_j}{du}$ jen o faktor rozeznávati může.

Skutečně obdržíme derivací rovnice (16) dle u (čili $\cos\vartheta$)

$$\frac{dq_{nj}}{du} = (n - j)\, q_{n,\, j+1}, \tag{18}$$

tedy
$$q_{n,\,j} = \frac{1}{n - j + 1} \cdot \frac{dq_{n,\, j-1}}{du}$$

a podobně
$$q_{n,\,j} = \frac{1}{(n - j + 1)(n - j + 2) \dots n} \, \frac{d^n}{du^n} (q_{no}) \tag{19}$$

Sférický úkon n-tého stupně q_{no}, jenž na úhlu ω nezávisí, zove se *zonálním*. ($j = 0$).

Jest dle (16) ustanoven řadou:

$$q_{no} = \cos\vartheta^n - \cos\vartheta^{n-2} \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}$$
$$+ \cos\vartheta^{n-4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \text{ atd.} \tag{20}$$

Věta IV. Jsou-li Q_{nj} a $Q_{nj'}$ dva různé *neúplné* sférické úkony *téhož* stupně n, jest při $j \gtrless j'$ $\int d\omega_1\, Q_{nj}\, Q_{nj'} = 0$. Důkaz lze snadno vésti, zavedeme-li za $d\omega_1$ hodnotu jeho $d\vartheta \sin\vartheta\, d\omega$; tím se redukuje integrál na

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} d\omega \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} q_{nj}\, q_{nj'}\, d\vartheta \times$$
$$\Big[A_j \cos(j\omega) + B_j \sin(j\omega)\Big]\Big[A_{j'} \cos(j'\omega) + B_{j'} \sin(j'\omega)\Big] \sin\vartheta^{j+j'},$$

jenž se dá rozvésti na dva faktory, z nichž každý jest o sobě integrálem, jeden dle ω, druhý dle ϑ. Že prvý se nulle rovná, jest snadno k nahlédnutí. Rovněž jest při $j = j'$

$$\int d\omega_1 \big(\sin\vartheta^j\, q_{nj} \cos(j\omega)\big)\big(\sin\vartheta^j\, q_{nj} \sin j\omega\big) = 0.$$

Věta V. Libovolný spojitý úkon dvou argumentů ω, ϑ: $\Psi(\omega, \vartheta)$ lze, jak již *Laplace* tvrdil, rozvinouti v konvergentní řadu sférických úkonů. Položme, za možné to považujíce

$$\Psi(\omega, \vartheta) = Q_0 + Q_1 + Q_2 \dots + Q_n + \text{atd.} \tag{20a}$$

To, oč běží, jsou koefficienty v jednotlivých sf. úkonech Q_0, $Q_1 \dots Q_n \dots$ Máme-li na př. vyšetřiti koefficient A_{jn} v Q_n (viz rovn. 17), násobíme obě strany rovnice (20^a) parciálným sférickým

úkonem n-tého stupně $\sin \vartheta^j . q_{nj} \cos(j\omega)$, pak elementem tělesného úhlu $d\omega_1$ a integrujeme přes celou kouli o radiu $= 1$. Dle vět (IV a I) zbývá na pravé straně rovnice (20^a):

$$A_{jn} \int d\omega_1 \cos^2(j\omega) \sin^{2j} \vartheta\, q_{nj}^2,$$

na levé:

$$\int \Psi(\omega, \vartheta)\, d\omega_1 \sin \vartheta^j q_{nj} . \cos(j\omega).$$

Z této rovnice najde se A_{jn}. Faktor u A_{jn} v hořejším výrazu transformujeme substitucí $d\omega_1 = d\omega \sin\vartheta\, d\vartheta$ na

$$\int_0^{2\pi} d\omega . \cos^2(j\omega) . \int_0^{\pi} q_{nj}^2 \sin \vartheta^{2j} \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Prvý integrál jest π, druhý přejde při substituci $\cos\vartheta = u$ v

$$\int_{-1}^{1} du\, (1 - u^2)^j (q_{nj})^2 = F(n, j),$$

jenž se pomocí vzorce (16), v němž za $\cos\vartheta \ldots u$ dosaditi třeba, vždy vypočítati dá. Rychleji, arciť indirektně, dojdeme cíle uvážíce vztah (18): $q_{nj} = \frac{dq_{n,\,j-1}}{du} . \frac{1}{n - j + 1}$. Obdržíme tu:

$$(n - j + 1)\, F(n, j) = \int_{-1}^{1} du\, (1 - u^2)^j q_{nj} \frac{dq_{n,\,j-1}}{du}$$

$$= \Big/_{-1}^{1} (1 - u^2)^j q_{nj} . q_{n,\,j-1} - \int_{-1}^{1} q_{n,\,j-1} \left[\frac{dq_{nj}}{du}(1 - u^2)^j - 2 q_{nj}\, u . j\, (1 - u^2)^{j-1}\right] du$$

Uvažme, že q_{nj} vyhovuje differenc. rovnici (15), v níž za h_j píšeme q_{nj}. Podobně bude $q_{n,\,j-1}$ hověti rovnici:

$$\frac{d^2 q_{n,\,j-1}}{du^2}(1 - u^2) - 2uj \frac{dq_{n,\,j-1}}{du} + q_{n,\,j-1}(n - j + 1)(n + j) = 0,$$

kterou lze se zřetelem na (18) též psáti ve formě:

$$\frac{dq_{n,\,j}}{du}(1 - u^2) - 2uj\, q_{n,\,j} + q_{n,\,j-1}(n + j) = 0$$

Odtud

$$(n - j + 1)\, F(n, j) = (n + j) \int_{-1}^{1} q_{n,\,j-1}^2 (1 - u^2)^{j-1} du = F(n, j - 1) . (n + j),$$

tedy:

$$F(n, j) = \frac{(n+j)(n+j-1)\ldots(n+1)}{(n-j+1)(n-j+2)\ldots n} F(n, o) \qquad (20^b)$$

Výraz $F(n, o) = \int_{-1}^{1} du\, q_{no}^2$ lze opět indirektní cestou redukovati na produkt.

Zonální úkon q_{no}, kratšeji q_n, splňuje rovnici (15), položíme-li $j = 0$, to jest rovnici:

$$(1-u^2)\frac{d^2 q_n}{du^2} - 2u\frac{dq_n}{du} + n(n+1) q_n = 0$$

neb

$$q_n (n^2 + n) = \frac{d}{du}\left(\frac{dq_n}{du}(u^2-1)\right) \qquad (21)$$

Derivujeme-li (21) p krát dle u, obdržíme násobivše výsledek na $(u^2-1)^p$:

$$(u^2-1)^p (n^2+n)\frac{d^p q_n}{du^p}$$

$$= (u^2-1)^p \left\{(u^2-1)\frac{d^{p+2} q_n}{du^{p+2}} + \frac{p+1}{1}\frac{d^{p+1} q_n}{du^{p+1}}.2u + \frac{(p+1)p}{1.2}.2.\frac{d^p q_n}{du^p}\right\}$$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{dq_n{}^{p+1}}{du^{p+1}}.(u^2-1)^{p+1}\right) + p.(p+1)\frac{d^p q_n}{du^p}(u^2-1)^p$$

a odtud

$$(u^2-1)^p \frac{d^p q_n}{du^p}(n-p)(n+p+1) = \frac{d}{du}\left(\frac{d^{p+1} q_n}{du^{p+1}}.(u^2-1)^{p+1}\right) \qquad (22)$$

Pomocí vztahů, které z (22) vzniknou substitucemi $p=0, 1..$, lze $F(n, o)$ redukovati. Takto obdržíme pomocí $p = 0$:

$$F(n, o) = \int_{-1}^{1} du\, q_n . q_n = \int_{-1}^{1} du\, q_n \frac{d}{du}\left(\frac{dq_n}{du}(u^2-1)\right).\frac{1}{n^2+n}$$

neb integrací per partes:

$$F(n, o) = -\frac{1}{n^2+n}\int_{-1}^{-1}\left(\frac{dq_n}{du}\right)^2 du\,(u^2-1).$$

Kladouce v (22) $p = 1$, máme po dosazení za $\frac{dq_n}{du}(u^2-1)$:

$$F(n, o) = -\frac{1}{(n^2+n)}\int_{-1}^{1} du \frac{dq_n}{du}.\frac{1}{(n-1)(n+2)}\frac{d}{du}\left(\frac{dq_n^2}{du^2}(u^2-1)^2\right)$$

a integrací per partes:

$$F(n, o) = \frac{1}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \int_{-1}^{1} du\,(u^2-1)^2 \left(\frac{d^2 q_n}{du^2}\right)^2 \quad \text{atd.,}$$

tedy konečně $F(n, o)$

$$= \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n} \int_{-1}^{1} du \left(\frac{d^n q_n}{du^n}\right)^2 (u^2-1)^n$$

Patrně jest $\frac{d^n q_n}{du^n} = n!$ (dle 20),

pak $\int_{-1}^{1} du\,(1-u^2)^n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos \vartheta^{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1},$

tedy: $F(n, o) = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{n!\ n!\ 2.4.6\ldots 2n}{.1.3.5.(2n-1).2n!},$ pak

$$F(n, j) = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{2.4.6.2n}{1.3.5\ldots 2n-1} \frac{(n-j)!}{(n+j+1)(n+j+2)\ldots 2n} \quad (23)$$

Nahoře uvedený koefficient A_{nj} jest tedy určen vztahem:

$$A_{nj}\,\pi\,.\,F(n, j) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} d\,\vartheta \sin\vartheta \sin\vartheta^j q_{nj} \Psi(\omega, \vartheta) \cos(j\omega) \quad (24)$$

a podobně B_{nj}, položí-li se $\sin(j\omega)$ místo $\cos(j\omega)$. Tyto vývody ukazují, *jak* lze koefficienty najíti, je-li rozvoj úkonu $\Psi(\omega, \vartheta)$ v řadu dle sférických úkonů možným; *že jest možným*, dokázal ponejprv *Lejeune Dirichlet* (stran bližšího viz *Heine* Kugelfunctionen, také *Thomson Tait* Naturalphilosophy I.).

§ 40. ***Tekutina nalézá se v centrovaném mezikoulí, na jehož hranicích rychlost předepsána jest.*** Je-li *a* radius koule vnitřní, *b* radius zevnější, lze pro potenciál rychlosti v mezikoulí položiti:

$$\varphi = \sum_{n=o} \left(\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Q_n + \left(\frac{r}{b}\right)^n \overline{Q}_n\right) \quad (24^a)$$

Q_n a $\overline{Q}_n$ jsou úplné sférické funkce *n*-tého stupně s *jinými* však koefficienty A_{nj}, B_{nj}, potažmo $\overline{A}_{nj}$, $\overline{B}_{nj}$.

Odtud:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum_{n=o} \left[\overline{Q}_n \frac{n}{b}\left(\frac{r}{b}\right)^{n-1} - \frac{n+1}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} . Qn\right] \quad (25)$$

Je-li $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ pro $r = a$, a $r = b$ předepsáno jakožto úkon posice, lze rozvojem jeho dle sférických úkonů přijíti ku vzorcům:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big/_{r=a} = \sum_{n=o} Q'_n\,; \quad \Big/_{r=b}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum_{n=o} Q''_n, \tag{26}$$

při čemž koefficienty A'_{nj}, B'_{nj} v Q'_n a podobně A''_{nj}, B''_{nj} v Q''_n jsou veličinami *danými*. Z (25) a (26) plynou pak, když se v (25) jednou $r = a$, podruhé $r = b$ položilo, rovnice:

$$\left.\begin{aligned} A'_{nj} &= \bar{A}_{nj}\,\frac{n}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} - \frac{n+1}{a}\,A_{nj} \\ A''_{nj} &= \bar{A}_{nj}\,\frac{n}{b} - \frac{n+1}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{n+2} A_{nj} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

sloužící k určení A_{nj}, $\bar{A}_{nj}$ a podobně dvě jiné k určení B_{nj}, $\bar{B}_{nj}$.

Je-li na př. $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ pro $r = a$, tedy $A'_{nj} = B'_{nj} = 0$, bude

$$\bar{A}_{nj} = A_{nj}\,\frac{b^n}{a^n}\cdot\frac{n+1}{n}, \quad \bar{B}_{nj} = B_{nj}\cdot\frac{b^n}{a^n}\,\frac{n+1}{n},$$

tak že rovnici (24^a) lze uvésti na tvar

$$\varphi = \sum_{n=o} Q_n\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\!\cdot n + (n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\right) \tag{28}$$

Sáhá-li zevní koule do nekonečna, musí v (24^a) $\bar{Q}_n$ vypadnouti, aby se φ pro $r = \infty$ nestalo nekonečně velikým. Schází-li vnitřní koule, jest položiti $Q_n = 0$ z podobného důvodu pro $r = 0$.

V případu prvém (když se koule nalézá v nekonečné tekutině) máme, redukuje-li se summa na *prvý* člen $n = o$, $\varphi = Q_o\,\frac{a}{r}$, což odpovídá v II. kap. projednanému případu radiálného pohybu povrchového; zbývá-li jen člen $n = 1$, obdržíme:

$$\varphi = Q_1\,\frac{a^2}{r^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\,Q_1\,\frac{2}{a}\,\frac{a^3}{r^3}.$$

Dle (17) jest $Q_1 = q_{10}\,A_{01} + (A_{11}\cos\omega + B_{11}\sin\omega)\,q_{11}\sin\vartheta$ neb dle (16) a (20) $Q_1 = A_{01}\cos\vartheta + (A_{11}\cos\omega + B_{11}\sin\omega)\sin\vartheta$.

Zavedou-li se zpět *Cartesiovy* souřadnice, bude

$$\varphi = const\, \frac{ax + by + cz}{r^3},$$

což odpovídá postupnému pohybu koule.

Příklady projednané v následujících paragrafech jsou dalšími zajímavými applikacemi funkcí sférických.

§ 41. ***Oscillace mořského povrchu jakožto celku.*** Místo skutečných poměrů zemských představme si *tuhou* kouli o radiu a a hustotě buď stejné aneb kolem centra symmetricky rozdělené jakožto jádro, pak moře o hustotě ϱ zemi *úplně* pokrývající, která v stavu rovnovážném tvoří druhou koncentrickou plochu o radiu b. Normálovou exkursi mořského povrchu ζ lze vyjádřiti řadou sférických úkonů. Předkládáme si tudíž otázku po periodě parciálného pohybu, při kterém ζ jest vyjádřitelno *jednoduchým* sférickým úkonem q_n*) Klademe tedy $\zeta = \alpha q_n$, a se zřetelem na klidné tuhé jádro dle (28):

$$\varphi = \beta q_n \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} n + (n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^n\right].$$

Pro $r = b + \zeta$ musí $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ nebo přibližně $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ přejíti v $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} q_n$. (Faktor α jest skrz časovou proměnlivost exkurse ζ úkonem jen časovým a zároveň všeobecnou koordinatou pohybu.) Až na malé veličiny vyššího řádu lze ve výrazu $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ položiti místo $r = b + \zeta$ prostě $r = b$. Tím obdržíme

$$\beta = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{b^2}{n(n+1)} \frac{a^n b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \tag{29}$$

Tlak uvnitř tekutiny jest dán vzorcem (20. kap. II.):

$$S = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}V^2 + P + \frac{p}{\varrho}, \tag{29a}$$

kdež S může ještě záviseti od času. Předpokládá-li se, že v nepřítomnosti pohybu ($\varphi = 0$) jest tlak na čase nezávislým, jest jím i S.

---

*) q_n vznikne z Q_n ve vzorci (17) tím, že všechny konstanty A_{nj}, B_{nj} až na jednu (α zvanou) vymizí.

P jest potenciál *Newtonových* sil gravitačních a závisí též na tvaru povrchu mořského, t. j. na ζ. Výpočtu jeho předešleme následující úvahu. Jednej se napřed o elektrickou hmotu, která s hustotou $\sigma = \sigma_0 q_n$ jest rozestřena po povrchu koule o radiu b. Pro zevnější a vnitřní body lze tu za *elektrický* potenciál Π

položiti: $$\Pi_e = C\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} q_n, \quad \Pi_i = C\left(\frac{r}{b}\right)^n q_n.$$

Rovnici *Laplace-ově* jest tím vyhověno a zároveň též nutné kontinuitě potenciálu při $r = b$ (to jest při prostupu vrstvou elektrickou). Normálové komponenty elektr. síly $-\frac{\partial \Pi_e}{\partial r}$ a $-\frac{\partial \Pi_i}{\partial r}$ jsou však pro $r = b$ rozpojité dle známého vzorce:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial r} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial r} = -4\pi\sigma = -4\pi\sigma_0 q_n,$$

z čehož vychází $$C = \frac{4\pi\sigma_0 b}{2n+1}.$$

Potenciál hmot elektrických vůbec (které se, jsou-li stejnorodé, odpuzují dle zákona *Coulombova*) jest v absolutní elektrostatické míře dán vzorcem $\Sigma \frac{m}{r}$. Jde-li o obecné *mechanické* hmoty, které se *přitahují* dle zákona *Newtonova*, musíme za potenciál položiti $-\Gamma . \Sigma \frac{m}{r}$, kdež jest Γ gravitační konstantou [přidržujeme-li se totiž dřívějšího ustanovení, že se síly z potenciálu *P* derivují dle vzorce $X = -\partial P / \partial x$ atd.].

Porušený povrch můžeme si při výpočtu potenciálu *P* představiti tak, jako kdyby přes neporušenou hladinu mořskou superponována byla hmota plošně rozdělená s hustotou $\zeta\varrho$ čili $\alpha q_n \varrho$. Potenciál pro zevní body bude pak složen ze dvou částí, z nichž jedna jest tak veliká, jako kdyby celá hmota *M*, moře i jádra, účinkovala z centra systému, kdežto druhá odpovídá náboji povrchovému. Lze tedy položiti se zřetelem na předchozí vývody:

$$P = -\Gamma\left(\frac{M}{r} + q_n\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} \cdot \frac{4\pi b\varrho}{2n+1} \cdot \alpha\right) \tag{30}$$

V našich pozdějších vývodech budeme potřebovati hodnotu $\frac{\partial P}{\partial t}$ a $\frac{\partial P}{\partial r}$ pro body na povrchu mořském, tedy pro $r = b + \zeta$

nebo přibližně pro $r = b$. Až na veličiny vyššího řádu bude tu:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\Gamma . M}{b^2} = g,$$

kdež g jest akcelerace na povrchu moře. Kdyby zevní koule o radiu b byla celá vyplněna touž tekutinou jako moře, byla by akcelerace g_0 na povrchu $g_0 = \frac{4\pi b^3 \varrho}{3b^2} \Gamma$. Při tomto zkráceném označení bude

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{r=b} = - \frac{3q_n}{2n+1} \frac{d\alpha}{dt} g_0 \qquad (30^a)$$

Další postup počtu jest tento.

Částice tekutá, která byla jednou na povrchu moře, bude při malých spojitých úchylkách vždy částí povrchovou a jestliže tlak p nad mořem jest stálý, bude časový vzrost tlaku jejího, to jest: $\frac{Dp}{Dt} dt$ *vždy nullou*. Odtud jde se zřetelem na (29^a)

$$\frac{DP}{Dt} + V \frac{DV}{Dt} + \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \qquad (30^b)$$

Výraz $\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z}$ skládá se ze dvou výrazů, z nichž $\frac{\partial P}{\partial t}$ již určen byl. Zavedeme-li:

$$- \frac{\partial P}{\partial x} = R\lambda = X, \quad - \frac{\partial P}{\partial y} = R\mu = Y, \quad - \frac{\partial P}{\partial z} = R\nu = Z,$$

kdež $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ jest silou výslednou o cosinech směru λ, μ, ν, dají se ve výrazu DP/Dt tři poslední summandy redukovati na záporně vzatý produkt z výsledné síly R (zde g) a ze složky rychlosti padající do směru jejího (která jest $- \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - q_n \frac{d\alpha}{dt}$).

Máme tedy:

$$\frac{DP}{Dt} = q_n \left(g - \frac{3}{2n+1} g_0\right) \frac{d\alpha}{dt} \qquad (31)$$

Považujeme-li α a $\frac{d\alpha}{dt}$ za malé veličiny prvého řádu, jest i DP/Dt veličinou téhož řádu a $V . \frac{DV}{Dt}$ malou veličinou řádu druhého.

Konečně jest

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+v\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}+w\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}$$

až na veličiny vyššího řádu rovno $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ čili:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{d^2\beta}{dt^2}\cdot q_n\cdot\frac{1}{b}\,\frac{n a^{2n+1}+b^{2n+1}\,.\,(n+1)}{a^n\,b^n} \tag{32}$$

Rovnice (30^b) přejde tím, když v $\frac{DP}{Dt}$ za $\frac{d\alpha}{dt}$ z (29) hodnota dosazena byla, v rovnici konečnou:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}+h^2\beta=0, \tag{33}$$

kdež

$$h^2=n\,(n+1)\,\frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{n\,.\,a^{2n+1}+b^{2n+1}\,.\,(n+1)}\left(1-\frac{3}{2n+1}\,\frac{g_0}{g}\right)\frac{g}{b} \tag{34}$$

Úplná perioda parc. pohybu τ jde ze vztahu: $\tau=\frac{2\pi}{h}$ a jest všeobecně veličinou o řádu kmitové doby obyčejného kyvadla, jehož délkou jest poloměr zemský. Pro kouli *úplně* tekutou jest $a=0$, $\frac{g_0}{g}=1$. Z faktorů v h^2 může jedině $\left(1-\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{g_0}{g}\right)$ býti záporným; pro úplně tekutou kouli jest roven $\frac{2\,(n-1)}{2n+1}$, tudíž vždy kladný, τ reálné a následovně rovnovážný stav vždy stabilný. Labilita může nastati při $\frac{g_0}{g}>\frac{2n+1}{3}$, kdyby na př. moře mělo mnohokráte větší hustotu nežli jádro. (Oscillace vyššího řádu to jest značného n jsou patrně stabilnější.)

Pro moře poměrně mělké jest

$$b^{2n+1}-a^{2n+1}=(2n+1)\,a^{2n}\,(b-a),$$

ostatně $a=b$, g_0/g patrně poměrem mezi hustotou moře a země,

tedy
$$h^2=n\,(n+1)\left(1-\frac{3}{2n+1}\,\frac{g_0}{g}\right)\frac{g\,(b-a)}{a^2} \tag{35}$$

Veličina h může tu nabýti hodnot velmi malých a následkem toho perioda τ hodnot velmi značných Supponujme za q_n *zonálné* úkony.

Dle (20) jest při $n = 1 \ldots q_1 = \cos\vartheta$, $\zeta = \alpha \cos\vartheta$, což odpovídá posunutí povrchu jakožto celku. Při $n = 2$ jest

$$q_2 = \cos^2\vartheta - \frac{1}{3} = \frac{1 + 3\cos 2\vartheta}{6};$$

$\zeta = \alpha q_2$ odpovídá pak deformaci moře ve tvar podlouhlý, přibližně ellipsoidický.

Položíme-li za střední hloubku moře b — a exempli gratia 2000 m, $g = 9{\cdot}8\, m/sec^2$, $g_0/g_1 = 1 : 5{\cdot}4$, $n = 2$, $2\pi a = 40 . 10^6\, m$, obdržíme $\tau = 1{\cdot}8 \times 10^5$ *sec.* Čas, kterého potřebuje tlak, aby se ve vodě rozšířil na distanci rovnou radiu zemskému, jest (při rychlosti zvuku ve vodě 1400 m) asi $\frac{1}{22} \times 10^5$, tedy nikoli malým proti době τ. Z toho jde, že uvedené naše řešení jest prvým přiblížením k pravdě, že totiž v exaktném provedení úlohy o oscillacích mořských nesmíme považovati ani vodu za nestlačitelnou ani zemi za tuhou (viz kap. I. úvod).

Úvahy tohoto odstavce chceme rozšířiti na oscillace tekutiny, která nejen uvnitř podléhá silám z potenciálu derivovaným, nýbrž na povrchu též silám kapillárným. V první řadě jde tu o vyšetření podmínky na volném povrchu tekutiny, nad nímž, jak předpokládáme, panuje stálý tlak p_0. Tlak *tekuté* částice v povrchu, lépe řečeno těsně *pod* geometrickým povrchem, jest zde vyjádřitelný dvojím způsobem: předně hydrodynamicky rovnicí (29[a]) a za druhé úvahou, že následkem kapillarity nastane při prostoupení povrchu *rozpojitost* tlaku, takže těsně pod povrchem jest tlak větší nežli těsně nad ním o součin z kapillárného napjetí T a ze součtu K obou hlavních křivostí $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$.

Druhý výraz tlaku jest tedy $p = p_0 + T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Poloměry R_1, R_2 čítají se positivně, jestliže příslušné středy padnou *do* tekutiny. Dosazením výrazu $p = p_0 + TK$ do (29[a]) obdržíme podmínku, že výraz:

$$S - \frac{p_0}{\varrho} = \Omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}V^2 + P + \frac{T}{\varrho}K \qquad (36)$$

má pro každou částici povrchovou bez ohledu na čas a posici její býti veličinou stálou. Jelikož časový vzrost této veličiny pro určitou částici jest dán výrazem $\frac{D\Omega}{Dt}dt$, musí býti $\frac{D\Omega}{Dt} = 0$, čili

$$\frac{DP}{Dt} + \frac{D}{Dt}(\tfrac{1}{2}V^2) + \frac{D}{Dt}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{T}{\varrho}\frac{DK}{Dt} = 0 \qquad (37)$$

Pro malé úchylky redukují se prvé tři summandy jako dříve a (37) přejde v:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}u + \frac{\partial P}{\partial y}v + \frac{\partial P}{\partial z}w + \frac{T}{\varrho}\frac{DK}{Dt} = 0 \qquad (37^a)$$

Zbývá tedy vyšetření výrazu $\frac{DK}{Dt}$, to jest rychlosti, s kterou roste součet křivostí příslušný téže částici materiálné, když se povrch po čase dt deformoval v jiný. Následkem toho odvodíme napřed všeobecný vzorec pro K.

§ 42. ***O křivosti ploch.*** *) Do bodu B na ploše, jejížto rovnice se zřetelem na libovolný systém souřadnicový $Oxyz$ jest dána vzorcem $U(x, y, z) = 0$, položme počátek nového souřadnicového systému $Bx'y'z'$, osu z' do jednoho z obou směrů normály, osy x', y' do roviny tangenciálné. Rovnice téže plochy v tomto systému budiž $f(x', y' z') = 0$. Jde o křivost v bodu B.

Pro body velmi blízké při B máme dle *Taylorovy* poučky

$$0 = f_1 x' + f_2 y' + f_3 z'$$
$$+ \tfrac{1}{2}(f_{11}x'^2 + 2f_{12}x'y' + f_{22}y'^2 + 2f_{13}x'z' + 2f_{23}y'z' + f_{33}z'^2) + \text{atd.};$$
$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x'},\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial y'} \ldots f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad \text{atd.}$$

jsou differenciálnými kvocienty úkonu f s argumenty $x' = y' = z' = 0$, z nichž se f_1 a f_2 se zřetelem na polohu osy z' musí nulle rovnati. Dále lze $x'z'$, $y'z'$, z'^2 vedle z' vynechati jakožto veličiny řádu nižšího. Tím obdržíme pro rovnici kratší výraz:

$$z' = -\frac{1}{2f_3}(f_{11}x'^2 + 2f_{12}x'y' + f_{22}y'^2) \qquad (38)$$

---

*) Křivostí ploch budeme (proti obyčejnému geometrickému obyčeji: křivost $= \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}$) rozuměti $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Rovina skrz osu z' položená a svírající s rovinou $x'z'$ úhel ϑ seče plochu v normálovém řezu, jehož rovnici obdržíme kladouce: $x' = \varrho \cos\vartheta$, $y' = \varrho \sin\vartheta$ do 38; tedy:

$$z' = -\frac{1}{2f_3}\varrho^2 (f_{11}\cos^2\vartheta + 2f_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta + f_{22}\sin^2\vartheta).$$

Dle známého vzorce o zakřivení čar:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 z'}{d\varrho^2}}{\left(1+\left(\frac{dz'}{d\varrho}\right)^2\right)^{3/2}},$$

v němž znamení odmocniny prozatím neurčitým zůstává, obdržíme pro křivost normálového řezu v bodě B, ($\varrho = 0$ $z' = 0$)

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{1}{f_3}(f_{11}\cos^2\vartheta + 2f_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta + f_{22}\sin^2\vartheta).$$

Odtud jde pro (stálý) součet křivostí, příslušných ku dvěma k sobě kolmým řezům normálovým, výraz:

$$K = \pm\frac{1}{f_3}(f_{11} + f_{22}) \qquad (39)$$

Týž bod B měj v nahoře uvedené libovolné soustavě xyz souřadnice x_1, y_1, z_1. Mezi souřadnicemi xyz, $x'y'z'$ téhož bodu panují dle věty o transformaci souřadnic vztahy:

$$x = x_1 + x'\lambda_1 + y'\mu_1 + z'\nu_1,$$
$$y = y_1 + x'\lambda_2 + y'\mu_2 + z'\nu_2,$$
$$z = z_1 + x'\lambda_3 + y'\mu_3 + z'\nu_3.$$

Dosazením těchto hodnot za x, y, z do rovnice plochy $U(x, y, z) = 0$ obdržíme dřívější rovnici $f(x', y', z') = 0$. Bude tedy:

$$f_3 = \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'}$$

čili:
$$f_3 = U_1\nu_1 + U_2\nu_2 + U_3\nu_3$$

(kdež $\frac{\partial U}{\partial x} = U_1$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{11}\ldots$ jsou zkratky pro diff. kvoc. úkonu U při argumentech $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$).

Podobně jest:

$$f_1 = U_1\lambda_1 + U_2\lambda_2 + U_3\lambda_3,$$
$$f_2 = U_1\mu_1 + U_2\mu_2 + U_3\mu_3.$$

Dalšími derivacemi dle $x'y'$ máme:

$$f_{11}=\lambda_1(U_{11}\lambda_1+U_{12}\lambda_2+U_{13}\lambda_3)+\lambda_2(U_{12}\lambda_1+U_{22}\lambda_2+U_{23}\lambda_3)$$
$$+\lambda_3(U_{13}\lambda_1+U_{23}\lambda_2+U_{33}\lambda_3),$$
$$f_{22}=\mu_1(U_{11}\mu_1+U_{12}\mu_2+U_{13}\mu_3)+\mu_2(U_{12}\mu_1+U_{22}\mu_2+U_{23}\mu_3)$$
$$+\mu_3(U_{13}\mu_1+U_{23}\mu_2+U_{33}\mu_3),$$

pak:
$$f_{11}+f_{22}=U_{11}(1-\nu_1^2)+U_{22}(1-\nu_2^2)$$
$$+U_{33}(1-\nu_3^2)-2U_{12}\nu_1\nu_2-2U_{13}\nu_1\nu_3-2U_{23}\nu_2\nu_3.$$

Za argumenty x, y, z nutno [odpovídajíc bodu $B(x'=y'=z'=0)$] v diff. kvoc. $U_1 \ldots U_{11}$ atd. dosaditi x_1, y_1, z_1, neb slovy řečeno souřadnice bodu, pro nějž K hledáme.

Uvážíme-li, že

$$\nu_1=\frac{U_1}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}},\ \nu_2=\frac{U_2}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}},\ \nu_3=\frac{U_3}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}}$$

jsou směrové cosiny zároveň osy z' i normály v B, obdržíme z (39) hledaný vzorec:

$$K.\sqrt{(U_1^2+U_2^2+U_3^2)^3}=U_1^2(U_{22}+U_{33})+U_2^2(U_{11}+U_{33})$$
$$+U_3^2(U_{11}+U_{22})-2U_{12}U_1U_2-2U_{13}U_1U_3-2U_{23}U_2U_3 \quad (40)$$

Kořen považujeme až k bližšímu ustanovení za dvojznačný, argumenty v U_1 atd. jsou souřadnice bodu, pro nějž K hledáme.

§ 43. ***Pokračování ku § 41; oscillace pod vlivem kapillarity.*** Buďtež x_0, y_0, z_0 souřadnice tekuté částice ve stavu rovnovážném, ξ, η, ζ její úchylky v čase t, kdy částice zaujímá posici x, y, z, tedy

$$\xi=x-x_0,\quad \eta=y-y_0,\quad \zeta=z-z_0 \quad (41)$$

Veličiny ξ, η, ζ závisí od původní posice x_0, y_0, z_0 a času t dle vztahů: $\xi=f_1(x_0, y_0, z_0, t)$ atd. neb $\xi=f_1(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t)$ atd.

Z posledních tří rovnic lze řešením dle ξ, η, ζ vyjádřiti ξ, η, ζ, to jest úchylku částice okamžitě se nalézající v posici xyz, *touto okamžitou posicí* a *časem* t, postup to, který se proto odporučuje, že obvykle vyjadřujeme závislé veličiny nezávislými proměnnými x, y, z, t.

Jednejme nyní s částicemi povrchovými, z nichž jedna měla opět souřadnice x_0, y_0, z_0, dokud se nalézala na povrchu rovnovážném, jehož rovnice jest $z_0=F(x_0, y_0)$. Patrně bude dle (41) rovnice povrchu, vždy týmiž částicemi vytvořeného,

udána v kterémkoli čase t vzorcem: $z - \zeta = F(x - \xi, y - \eta)$, aneb se zřetelem k tomu, že ξ, η, ζ mají zůstati velmi malými, též vzorcem:

$$U(x, y, z) \equiv -z + F(x, y) + (\zeta - F_1\xi - F_2\eta) = -z + F(x, y) + S = 0 \quad (42)$$

Výraz $S = \zeta - F_1\xi - F_2\eta$ jest malou veličinou téhož řádu jako ξ, η, ζ a závisí skrz $\xi = f(x, y, z, t)$ atd. také od času. Odtud jde derivacemi:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = F_1 + \frac{\partial S}{\partial x},\ U_2 = F_2 + \frac{\partial S}{\partial y},\ U_3 = -1 + \frac{\partial S}{\partial z}, \\ U_{11} = F_{11} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2},\ U_{22} = F_{22} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2},\ U_{12} = F_{12} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}, \\ U_{13} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z},\ U_{23} = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z},\ U_{33} = \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \end{array}\right\} \quad (42^a)$$

Pravá i levá strana rovnice (40) obsahují mimo konečné veličiny ještě malé veličiny prvého řádu, na př. U_{23}, U_{33} atd. Redukujeme-li vše tím, že vynecháme veličiny řádu druhého, obdržíme: $K = K_0 + K_1$, kdež K_0 jest veličinou konečnou a K_1 veličinou nekonečně malou o řádu ζ.

Patrně jest:

$$K_0 = \frac{F_1^2 F_{22} + F_2^2 F_{11} + (F_{11} + F_{22}) - 2F_{12}F_1F_2}{\sqrt{(1 + F_1^2 + F_2^2)^3}}$$

a závisí na x, y, z, nikoli na t; K_1 jest za to veličinou o řádu S čili ζ a závisí také od t. Obraťme se nyní ku:

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} + w \frac{\partial K}{\partial z} \quad (42^a)$$

Se zřetelem k dřívějšímu a k okolnosti, že i u, v, w čili $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.. jsou o řádu ζ či S, bude až na veličiny vyššího řádu:

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial K_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial K_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial K_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial K_0}{\partial z} \quad (43)$$

Jde tedy o výpočet veličin K_0 a K_1. Vhodnou volbou souřadnicového systému lze ujíti dlouhým výpočtům s tím spojeným. Definujme jej následovně. V bodě $B(x, y, z)$ deformovaného povrchu, pro nějž DK/Dt vyšetřujeme, nalézá se částice, která v rovnovážném povrchu zaujímala posici B_0, x_0, y_0, z_0. Do této položme počátek souřadnic xyz s osou z čelící do tekutiny

směrem normály *rovnovážného* povrchu. Rovnici nedeformované plochy lze pak rozvinutím v řadu psáti ve formě:

$$z_0 = F(x_0, y_0) = \frac{1}{1.2}(A_{11}x_0^2 + 2A_{12}x_0y_0 + A_{22}y_0^2)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(x_0^3, y_0^3, x_0^2y_0, x_0y_0^2) + \text{atd.}$$

Zavedeme-li do ní $x_0 = x - \xi$ atd., obdržíme jako dříve rovnici deformovaného povrchu v blízkém sousedství bodu B neb B_0, tedy

$$U(x, y, z) \equiv -z + \tfrac{1}{2}(A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2) + \ldots + S, \quad (43^a)$$

kdež S jest jako dříve rovno $\zeta - F_1\xi - F_2\eta$. Bude tedy při uvedené speciálné poloze souřadnicového systému odpovídajíc rovnici (42):

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}(A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2) + \ldots,$$
$$F_1(x, y) = A_{11}x + A_{12}y + \ldots, \quad F_2(x, y) = A_{12}x + A_{22}y \ldots,$$
$$F_{11} = A_{11} + \ldots, \quad F_{12} = A_{12} + \ldots, \quad F_{22} = A_{22} + \ldots$$

Argumenty x, y, vyskytující se v U_1, U_{11}, pak i ve F_1, F_2, F_{22}, S atd. jsou dle dřívějšího identické se souřadnicemi bodu B, pro nějž K hledáme, v našem systému tedy s jeho úchylkami $\xi\,\eta\,\zeta$ z polohy rovnovážné, která byla zvolena za počátek souřadnic. Následkem toho jsou $F_1 = A_{11}\xi + A_{12}\eta + \ldots$, F_2, tudíž i U_1, U_2, nikoli však jejich derivace F_{11}, F_{12}, F_{22} malými veličinami o řádu ξ, η, ζ. Pomocí rovnic (42ᵃ) utvořený výraz: $(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)^{\frac{3}{2}}$ přejde v tím v: $\left(1 - 2\frac{\partial S}{\partial z}\right)^{\frac{3}{2}}$, podobně pravá strana rovnice (40) v:

$$\left(1 - \frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \left(F_{11} + F_{22} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)$$

a místo (40) obdržíme:

$$K = K_0 + K_1 = \pm \left\{F_{11} + F_{22} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + (F_{11} + F_{22})\frac{\partial S}{\partial z}\right\}^{*)} \quad (44)$$

---

*) Protože dvojznačná mocnina s exponentem $\left(-\frac{3}{2}\right)$ nahrazena byla po rozvoji dle binomické věty jednoznačným výrazem $\left(1 + 3\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)$, musí dvojznačnost $\pm$ přejíti na K samo. Jest tedy

$$K_0 = \pm(F_{11} + F_{22}), \quad K_1 = \pm\left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) + (F_{11} + F_{22})\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right] \quad (44^\alpha)$$

O znamení $\pm$ rozhodneme následovně. Volíme-li osu z směrem do tekutiny, padnou do ní také středy křivosti ($K > 0$), jestliže obrací plocha oblou část k rovině xy, to jest, je-li $F_{11} + F_{22} > 0$. Nutno tedy podržeti znamení $+$.

Při tvoření výrazu $\frac{\partial K_1}{\partial t}$ pomocí rovn. (44^α) vyskytnou se výrazy jako $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ atd. Patrně jest rychlost částice

$$u = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + \ldots$$

až na veličiny vyššího řádu totožna s $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ atd. Z rovnice (44^α) a se zřetelem na $S = \zeta - F_1\xi - F_2\eta$ obdržíme tedy:

$$\frac{\partial K_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial S}{\partial t} + (F_{11} + F_{22})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(w - uF_1 - vF_2) + (F_{11} + F_{22})\frac{\partial}{\partial z}(w - F_1 u - F_2 v).$$

Místo $\frac{\partial w}{\partial z} - F_1\frac{\partial u}{\partial z} - F_2\frac{\partial v}{\partial z}$ lze psáti $\frac{\partial w}{\partial z}$, místo $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w$ skrz $\Delta w = 0 \ldots - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$. Dále jest

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(F_1 u) = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right)u + 2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

když člen $F_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ jakožto malou veličinu druhého řádu vynecháme.

Podobně jest

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(vF_2) = v\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Dále máme $K_0 = F_{11} + F_{22}$, tedy dle (43):

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}(F_{11} + F_{22})\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(F_{11} + F_{22})\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (F_{11} + F_{22})\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right)u-2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right)v-2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

neb:
$$\frac{DK}{Dt}=-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(F_{11}+F_{22})\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}F_{11}-2\frac{\partial v}{\partial y}F_{22}-2F_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{45}$$

V předchozím použito vztahu $\Delta w=0$ i té okolnosti, že F_1, F_2 F_{11} atd. nezávisí na t a z. Dosaďme v (45) $w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ a položme ještě osy x, y do hlavních čar křivoznačnosti položených bodem B_0 na ploše rovnovážné. Následkem toho stane se F_{12} též nekonečně malým, čímž se (45) zjednoduší. Podmínka povrchová (37ª) přejde tím v rovnici:

$$0=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial P}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$+\frac{T}{\varrho}\left\{(F_{11}+F_{22})\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}F_{11}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}F_{22}\right\} \tag{46}$$

Podotkněme opětně, že rovnice (46) náleží k bodu B na povrchu deformovaném a že systém, k němuž se vztahují souřadnice jeho, jest položen skrze korrespondující bod B_0 povrchu rovnovážného způsobem již uvedeným. Prvé tři summandy v (46) nezávisí vůbec na souřadnicovém systému, $F_{11}=A_{11}+\ldots$ a $F_{22}=A_{22}+\ldots$ se liší jen infinitesimálně od hlavních křivostí plochy nedeformované.

Příklad I. Jest známo, že olej v patřičně řídkém lihovém roztoku suspendovaný nabývá, jak *Plateau* ukázal, rozmanitých tvarů rovnovážných, mezi nimi i kulovitých; dešťová kapka stává se při pádu kulovitou následkem sil kapillárných a dostává se do oscillací, vlivem jejich umožněných. (*Savartovy* pokusy o konstituci vodního paprsku.) V obou případech lze si tíži odmysliti: v prvém skrz princip *Archimedův*, v druhém, protože jde o pohyb částic vůči osám souřadnicového systému, jenž prochází volně padajícím těžištěm. Položíme tedy v rovn. (46): $P=0$.

Jednej se o oscillace kapky o radiu a. Zde jest $F_{11} = F_{22} = \frac{1}{a}$,

dle věty *Laplace-ovy*: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$,

tudíž dle (46) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{T}{\varrho} \left(\frac{4}{a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \right) = 0 \qquad (46^a)$$

Úchylky ζ od tvaru kulového, tudíž i φ, dají se na povrchu rozvinouti v řadu sférických úkonů. Je-li ζ rozděleno dle sférické funkce q_m o *jedné* konstantě, pišme $\varphi = \alpha q_m \left(\frac{r}{a} \right)^m$, kdež α ještě od času závisí. V úvaze, že $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ máme z (46^a):

$$O = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{T}{\varrho} \frac{\alpha}{a^3} \big(m (m-1)(m-2) + 4 (m-1) m \big) \qquad (47)$$

a odtud pro úplnou periodu τ_m příslušné parciálné oscillace:

$$\tau_m = 2\pi \sqrt{\frac{a^3 \varrho}{Tm (m-1)(m+2)}} \qquad (48)$$

Nejdelší periodou jest ta, které odpovídá $m = 2$.

Uvážíme-li, že padající kapka má tvar rotačního tělesa s osou z vertikálně položenou, můžeme úkony q_m považovati za zonálné, t. j. jen závislé na úhlu ϑ, který svírá průvodič z centra koule vedený s vertikálou. *V případě* $m = 2$ máme dle (20) $\zeta = (\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}) \beta$, kdež β jest periodickým úkonem časovým o periodě $\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3 \varrho}{T . 2 . 1 . 4}}$.

Snadná úvaha učí, že tvar kapky udaný vzorcem ζ odpovídá, dokud jest $\beta > 0$, ellipsoidické figuře prodloužené ve směru vertikály a při $\beta < 0$ podobné figuře sploštěné.

Tyto oscillace τ_2 byly *lordem Rayleighem*, jenž vzorec (48) pro zonálné úkony ponejprv z principu energie odvodil, také experimentálně studovány. Později se zabýval týmž předmětem *Lenard* (Wied. Ann. 30). Souhlas theorie se zkušeností jest dosti dobrý.

Příklad II. Na nekonečně dlouhém válci tekutinovém s průřezem kruhovým o poloměru a mohou následkem kapillarity vzniknouti oscillace takové povahy, že se symmetrie tvaru

povrchového kolem osy válcové (osy x) sice udržuje, kdežto podél osy panuje periodicita, následkem kteréž se vše opakuje, jestliže x se zvětší o délku (vlny) λ. Dle rovnice (3^a) obdržíme rovnici *Laplace-ovu* ve formě:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{49}$$

Řešením jejím jest: $\varphi = \alpha \sin (kx + k_0)\, F(r)$, kdež α jen od času závisí; k_0 jest stálá a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. K určení úkonu $F(r)$ slouží z (49) derivovaná rovnice:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dF}{dr} = k^2 F \tag{49^a}$$

Položme $F(r) = J(kr) = J(s)$, tedy $s = kr$, tak že z (49^a) obdržíme pro určení úkonu $J(s)$ rovnici

$$J''(s) + J'(s)\,\frac{1}{s} = J(s) \tag{49^b}$$

Lze jí vyhověti řadou $\sum\limits_{n=0}^{n=1} a_n s^n$ postupující dle potencí veličiny s, je-li $a_n = a_{n-2}/n^2$; tedy řadou

$$J(s) = 1 + \frac{s^2}{2^2} + \frac{s^4}{2^2 \,.\, 4^2} + \frac{s^6}{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2} + \dots \tag{50}$$

Povrchovým bodem B_0 na válci položme parallelu k ose jeho; směrem této nové osy x-ové jest křivost $F_{11} = 0$. Týmž bodem položme kolmý řez k ose a na kruhu o radiu a takto vzniklém veďme skrz B_0 normálu, osu z, do vnitř tekutiny, osu y pak skrz B_0 směrem tečné kruhové. Tím jest ustanoven souřadnicový systém v rovnici (46) zavedený.

Potenciál v libovolném bodě B *deformovaného* řezu jest úkonem času, souřadnice x a distance od středu $r = \sqrt{y^2 + (a-z)^2}$. Odtud jde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{y^2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\frac{z-a}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{(z-a)^2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r}\right).$$

V bodě B jest přibližně $z=0$, $x=0$, $y=0$, $r=a$, tedy $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$, podobně $\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}=-\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}$.

Neexistují-li síly zevnější, máme dle (46) skrz $F_{22}=\frac{1}{a}$, $F_{11}=0$:

$$O=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{T}{\varrho}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}-\frac{2}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\text{ (pro } r=a) \quad (50^a)$$

Dosazením $\varphi=\alpha\, sin\,(kx+k_0)\,J\,(kr)$ máme

$$O=\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{T}{\varrho}\left(\frac{k^2}{a}J''\,(ka)+k^3J'''\,(ka)-\frac{2k}{a^2}J'\,(ka)\right)\frac{1}{J\,(ka)}.$$

Dle diff. rovnice (49^b), jíž vyhovuje $J\,(s)$, lze $J''\,(s)$ i $J'''\,(s)$ vyjádřiti úkony $J'\,(s)$ a $J\,(s)$. Tím bude

$$O=\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{T}{\varrho a^3}\,\frac{J'\,(ka)}{J\,(ka)}\,.\,ka\,(k^2a^2-1) \quad (51)$$

Je-li ka, to jest $\frac{2\pi a}{\lambda}>1$, tedy délka vlny λ menší nežli obvod válce, vyhoví se poslední rovnici periodickým úkonem časovým s periodou τ pomocí: $\frac{2\pi}{\tau}=\sqrt{\frac{T}{\varrho a^3}\,\frac{J'\,(ka)}{J\,(ka)}\,(k^2a^2-1)\,ka}$.

Pro $ka<1$ neb $\lambda>2\pi a$ hoví rovnici exponenciella časová o tvaru $\alpha=e^{qt}$, válcový tvar jest, jak již *Plateau* experimenty dokázal, labilný a má maximum lability, má-li q maximum.

Ze vzorce plynoucího z (51)

$$q^2=\frac{T}{\varrho a^3}\,(1-k^2a^2)\,ka\,\frac{J'\,(ka)}{J\,(ka)}$$

najde se pomocí řady $J\,(s)$ pro vodu maxim. $(ka)^2=0{\cdot}4858$, tedy $\lambda=4{\cdot}508\times 2a$. Při této délce vlny λ se válec tekutý nejsnadněji promění v kapky. Resultát souhlasí přibližně s pokusy *Savartovými*, konanými na vodních paprscích unikajících z otvoru kruhového (*lord Rayleigh*).

Příklad III. Jde-li o hladinu původně rovinou a ze sil jen o tíži, jest $P=-gz$, čítáme-li osu z vertikálně dolů, což souhlasí dle (46) s normálou k rovnovážnému povrchu. Máme tedy skrz $F_{11}=F_{22}=0$ na povrchu tekutiny

$$O=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{T}{\varrho}\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}-g\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad (52)$$

čítáme-li osu z vertikálně nahoru, bude

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{T}{\varrho}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \tag{53}$$

Vzorec (53) odvodil autor (Wied. Ann. 5), jeho zvšeobecnění (46) platné pro libovolný povrch udává se tu poprvé.

§ 44. ***Dvě koule v tekutině nekonečné.*** V paragrafu (40) bylo dokázáno, že při libovolně daných normálových rychlostech na povrchu koule v tekutině nekonečné potenciál φ vyjádřiti lze sférickými úkony Q_n dle vzorce:

$$\varphi = \sum_{n=0}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Q_n\right) = Q_0 \cdot \frac{R}{r} + Q_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \cdot Q_2\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \ldots \tag{54}$$

Vzorec ztrácí platnost, nalézá-li se v tekutině ještě jedna koule o radiu R' v distanci d, ale klidná, jak s počátku předpokládati chceme; neboť φ v (54) nesplňuje na povrchu jejím podmínku $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Připojme k potenciálu φ v rovnici (54), chceme jej zváti φ_1, podobný výraz φ_2 přiřaděný kouli druhé, tedy

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}\left[\left(\frac{R'}{r'}\right)^{n+1} Q'_n\right],$$

v němž r' označuje distanci téhož potenciálového bodu od středu druhé koule a Q'_n sférický úkon argumentů ϑ', ω', které ustanovují angulárnou polohu průvodiče r' vůči souřadnicovému systému s druhou koulí spojenému. Patrně můžeme $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}$, pocházející od prvé koule na povrchu druhé koule rozvinouti v řadu sférických úkonů $\overline{Q}'_n(\omega', \vartheta')$ s konstantami známými a bude pak zajisté možná, neurčité konstanty funkce Q'_n ve φ_2 tak určiti, aby na povrchu druhé koule bylo $\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$. My jsme tedy v stavu, kompensovati připojením potenciálu φ_2 normálový pohyb na kouli druhé, pokud jest podmíněn pohybem *prvé* koule.

Potenciálu φ_1 ubývá při vzdalování se od prvé koule aspoň dle prvé potence vzdálenosti, tudíž rychlosti aspoň dle potence druhé. Následkem toho bude rychlost $\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}$ na povrchu koule II

veličinou o řádu součinu „$\left(\frac{R}{d}\right)^2$ *krát rychlost na kouli prvé*“ a téhož řádu bude φ_2 vůči φ_1. Připojením potenciálu φ_2 poruší se však podmínka, potenciálem φ_1 splněná, že totiž normálová rychlost na prvé kouli má míti hodnotu předepsanou. Kompensujme tedy φ_2 připojením dalšího členu φ_3, který na téže prvé kouli bude vůči φ_1 veličinou již jen o řádu $\varphi_1 \cdot \frac{R^2}{d^2} \cdot \frac{R'^2}{d^2}$. Takto pokračujíce přijdeme k řadě $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \ldots$, která s jakoukoli žádanou zevrubností udává potenciál φ, jenž se srovnává s předepsaným pohybem na kouli prvé a s klidem na kouli druhé.

Je-li na *obou* koulích pohyb předepsán, lze úlohu dekomponovati na dvě, při čemž vždy jen jedna má předepsaný pohyb, kdežto druhá jest v klidu.

Řešení chceme illustrovati na dvou jednoduchých případech o společné vlastnosti, že se koule nalézají v distanci značné proti poloměrům jejich. Tehdy lze se uspokojiti s prvým členem kompensačním φ_2. Ostatně podotýkáme, že přesnější řešení se též dá provésti (viz Basset I.). V případu prvém *A* budeme předpokládati, že centra koulí jsou v klidu, kdežto povrchy jejich mají pohyby čistě radiálné; v případě *B* předpokládáme, že mají jen translatorné pohyby.

A) *Radiálně oscillující koule v nekonečné tekutině.* Posice středů kulových položených na ose x-ové buďtež: $x = 0$, $x = d$; prvá koule měj povrchovou radiálnou rychlost $= 1$, druhá ať jest v klidu. Zde bude viz pag. 17 (d):

$$\varphi_1 = -\frac{R^2}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{R^2 x}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{R^2 y}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{R^2 z}{r^3}.$$

Nalézá-li se potenciálový bod na povrchu druhé koule, bude tu

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{x-d}{R'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{y}{R'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{z}{R'}$$
$$= \frac{R^2}{R' r^3}\left(x\,(x-d) + y^2 + z^2\right) = \frac{R^2}{R' r^3}\left(R'^2 + d\,(x-d)\right).$$

Patrně jest $x - d = \cos \vartheta \,.\, R'$ veličinou téhož řádu jako R'. Je-li tedy d značné proti R', bude v prvém sblížení $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{R^2}{d^2} \cos \vartheta$. Normálový pohyb od φ_1 na kouli II jest pak tak veliký, jako

kdyby koule II postupovala rychlostí $\frac{R^2}{d^2}$ směrem osy x-ové, to jest od koule I ku II. Člen φ_2 bude pak odpovídati stejně rychlému pohybu koule zpět. Máme tudíž [dle (3) kap. IV.]

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{R^2}{r} - \frac{R^2}{d^2}\frac{R'^3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right).$$

Je-li radiálná rychlost prvé koule U, připojíme ku $\varphi_1 + \varphi_2$ faktor U; má-li i koule druhá rychlost U', bude úhrnný potenciál:

$$\varphi = -\frac{UR^2}{r} - \frac{U'R'^2}{r'} - \frac{UR^2R'^3}{2d^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) + \frac{U'R'^2R^3}{2d^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (55)$$

Kinetická energie tekutiny jde ze vzorce:

$$\frac{2T}{\varrho} = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\omega = -U\int \varphi_{\mathrm{I}}\, d\omega - U'\int \varphi_{\mathrm{II}}\, d\omega,$$

v němž se integrace plošná vztahuje na oba povrchy kulové. Při tom jest na prvé kouli skrz $r' = d$ (příbližně) a $r = R$

$$\varphi_{\mathrm{I}} = -\frac{UR^2}{R} - \frac{U'R'^2}{d} + \frac{UR^2R'^3}{2d^2}\cdot\frac{x-d}{d^3} - \frac{U'R'^2R^3}{2d^2}\frac{x}{R^3}$$

a podobně φ_{II}. Tím bude až na veličiny vyššího řádu:

$$\frac{2T}{\varrho} = 4\pi U^2R^3 + 4\pi U'^2R'^3 + 8\frac{UU'}{d}\pi R^2R'^2 \quad (56)$$

Proměnlivá část energie kinetické umenšuje se tudíž s prvou potencí distance.

Zaujímají-li středy koulí na ose x-ové posice x, x', kdež $x' - x = d$, můžeme x, x' a okamžité exkurse povrchů kulových považovati za *Lagrange-ovy* souřadnice systémové. Ku kinetické energii tekutiny T připojíme ještě (při klidu center kulových, jejž předpokládáme), kinetickou energii koulí samých, to jest člen o tvaru $U^2F_1 + U'^2F'$, nezávislý na posici koulí, tedy na d, x, x'. Úhrnná energie jest tedy: $\overline{T} = T + U^2F_1 + U^2F_2$. Veličiny $\dot{x}$, $\dot{x}'$ se v ní nevyskytují.

Dle *Lagrange-ových* rovnic máme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial (\overline{T})}{\partial x} &= X \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{x}'}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial x'} &= X' \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Při předpokládaném klidu center jest $\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \overline{T}}{\partial y} = 0$, pak

$$X = + \frac{\varrho}{2} . 8 \frac{UU'}{d^2} \pi R^2 R'^2 \frac{\partial d}{\partial x} = - \frac{4\pi\varrho UU' R^2 R'^2}{d^2}$$

a podobně:
$$X' = 4\pi\varrho . \frac{UU' R^2 R'^2}{d^2} .$$

Jsou-li tedy radiálné rychlosti U, U' znamení téhož, bude X záporné, X' kladné, a jelikož XX' označují zevní síly účinkující směrem osy x-ové, které se srovnávají s *klidem* center, budou se koule přitahovati po způsobu dvou elektrických pólů silou, které ubývá s dvojmocí vzdálenosti.

Protivnému znamení obou rychlostí U odpovídá odpuzování. Účinek jest tedy co do závislosti od distance týž, co do směru síly obrácený jako u dvou pólů elektrických. Dejme tomu, že povrchový pohyb koulí jest periodický. Je-li $U = U_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} t$, $U' = U'_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \alpha)$, bude střední časová hodnota X', definovaná rovnicí:
$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau X' dt$$

rovna
$$4\pi \frac{U_0 U'_0}{d^2} R^2 R'^2 \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi\alpha}{\tau} .$$

Effekt závisí pak na rozdílu fásí α (pokusy *Bjerknesovy*).

B) *Koule se pohybují translatorně.* Potenciál φ_1 pocházející od prvé koule (v centru souřadnic), která má ve směru λ, μ, ν postupnou rychlost U, jest dle pag. 20. rovn. (28):

$$\left. \begin{aligned} &\varphi_1 = \frac{R^3 U}{2} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right], \\ &\text{tedy:} \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = - \lambda H + xG, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = - \mu H + yG, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = - \nu H + zG, \\ &\text{kdež} \quad H = \frac{R^3 U}{2r^3}, \quad G = \frac{3}{2} \frac{R^3 U}{r^5} (\lambda x + \mu y + \nu z) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Položíme-li osu x-ovou do obojstředné této a druhé koule

klidné, která se nalézá se svým středem v distanci $x = d$, bude radiálná rychlost prvou koulí na ní vzbuzená:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{x-d}{R'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{y}{R'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{z}{R'}$$

$$= -\frac{H}{R'}(\lambda x + \mu y + \nu z - \lambda d) + \frac{G}{R'}[R'^2 + d(x-d)].$$

Vynechá-li se opět R'^2 vedle $d(x-d)$ a položí-li se v H a G za r (příbližně) d, bude:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{R^3}{2d^3} \cdot \frac{U}{R'}[\lambda(x-d) + \mu y + \nu z],$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{R^3}{d^3} \cdot \frac{U}{R'}(\lambda x + \mu y + \nu z) \frac{x-d}{d} \qquad (59)$$

Jelikož na povrchu druhé koule jest x od d málo rozdílné, tedy $\lambda x + \mu y + \nu z$ téměř rovno λd, redukuje se druhý summand v (59) $\frac{3}{2} \frac{R^5}{d^3} \lambda U \frac{x-d}{R'}$, jest tedy tak veliký, jako kdyby se koule II pohybovala směrem osy x-ové rychlostí: $\frac{3}{2} \frac{R^3}{d^3} \lambda U$. Vedeme-li středem druhé koule parallelu ku λ, μ, ν, bude výraz

$$\lambda \frac{(x-d)}{R'} + \mu \frac{y}{R'} + \nu \frac{z}{R'}$$

roven cosinu úhlu obsaženého mezi ní a průvodičem r', tedy normálová rychlost od prvního summandu v (59) tak veliká, jako kdyby druhá koule měla ve směru $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ rychlost postupnou $\frac{R^3}{2d^3} U$.

Kompensační člen φ_2 lze tedy snadno udati: skládá se ze dvou dílů. Úhrnem máme pro potenciál rychlosti φ' při druhé kouli klidné:

$$\varphi' = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{R^3 U}{2}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$+ \frac{R^3 U \,.\, R'^3}{4d^3}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) + \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)\right]$$

$$- \frac{3}{4} \frac{R'^3 R^3}{d^3} \lambda U \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right). \qquad (60)$$

Je-li prvá koule v klidu a druhá dle směru λ', μ', ν' v postupném pohybu U', bude příslušný potenciál φ'' roven:

$$\varphi'' = \frac{R'^3 U'}{2}\left(\lambda' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) + \mu' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) + \nu' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)$$
$$+ \frac{R'^3 U' \,.\, R^3}{4d^3}\left(\lambda' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mu' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \nu' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$
$$- \frac{3}{4}\frac{R^3 R'^3}{d^3} \lambda' U' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (61)$$

Poznamenejme, že ve φ' značí dle ustanovené polohy koulí λU projekci rychlosti a $\frac{\partial}{\partial x}$ derivaci dle obojstředné, obé *od koule I ke kouli II*, že tedy při tvoření výrazu φ'' musíme místo λ, $\frac{\partial}{\partial x}$ položiti $(-\lambda')$, $\frac{\partial}{\partial(-x)}$. Součet $\varphi' + \varphi''$ odpovídá současnému pohybu obou koulí s rychlostmi U, U' dle směrů $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$. Při výpočtu kinetické energie tekutiny musíme znáti $(\varphi' + \varphi'')_{I}$ potažmo $(\varphi' + \varphi'')_{II}$ na povrchu prvé, potažmo druhé koule.

V prvém případě jest příbližně $r' = d$, pak $r = R$. Rozvedeme-li naznačené derivace v (60, 61), obdržíme

$$\varphi_{I} = (\varphi' + \varphi'')_{I} = -\frac{U}{2}(\lambda x + \mu y + \nu z) - \frac{UR^3 R'^3}{4d^3}\frac{(\lambda(x-d) + \mu y + \nu z)}{r'^3}$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{R'^3 R^3}{d^3} U\lambda \,.\, \frac{x-d}{r'^3} - \frac{R'^3 U'}{2r'^3}(\lambda'(x-d) + \mu' y + \nu' z)$$
$$- \frac{U' R'^3}{4d^3}(\lambda' x + \mu' y + \nu' z) + \frac{3}{4}\frac{U'\lambda' R'^3}{d^3} x \qquad (62)$$

Pátý a šestý summand jest nekonečně malý o řádu $\frac{R'^3}{d^3}$ vůči prvému členu v (62), za to nekonečně veliký proti druhému a třetímu členu, kteréžto jsou o řádu $\left(\frac{R'}{d}\right)^5$, tak že je vynechati lze.

Ve čtvrtém členu (62) třeba provésti redukci. Jest totiž

$$r'^2 = R^2 + d^2 - 2dx\,; \quad \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{d^3}\left(1 - \frac{2x}{d}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{d^3}\left(1 + \frac{3x}{d}\right),$$

tedy:
$$\frac{\lambda'(x-d) + \mu' y + \nu' z}{r'^3} = \frac{\lambda' x + \mu' y + \nu' z}{d^3}$$
$$- \frac{\lambda' d}{d^3}\left(+1\frac{3x}{d}\right) = \frac{\lambda' x + \mu' y + \nu' z - 3\lambda' x}{d^3} - \frac{\lambda'}{d^2}$$

a následkem toho:

$$\varphi_{\mathrm{I}} = -\frac{U}{2}(\lambda x + \mu y + \nu z) - \frac{\lambda' x + \mu' y + \nu' z}{4}\frac{3U'R'^3}{d^3}$$
$$+ \frac{9}{4}\lambda' x \frac{R'^3 U'}{d^3} + \frac{R'^3 U'\lambda'}{2d^2} \qquad (63)$$

Následkem toho jest skrz

$$\int d\omega\, x^2 = \int d\omega\, y^2 = \int d\omega\, z^2 = \frac{R^2}{3}\,.\,4R^2\pi,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{I}} = \frac{U(\lambda x + \mu y + \nu z)}{R}:$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\omega\, (\varphi' + \varphi'')_{\mathrm{I}}$$
$$= -\left(\frac{4R^3\pi}{3}\frac{U^2}{2} + \pi(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')UU'\left(\frac{RR'}{d}\right)^3 - 3\lambda\lambda'\pi UU'\left(\frac{RR'}{d}\right)^3\right) \quad (64)$$

Zcela podobně najdeme integrál přes druhou kouli, a následkem toho pro kinetickou energii tekutiny T výraz:

$$\frac{2T}{\varrho} = \frac{4R^3\pi}{3}\frac{U^2}{2} + \frac{4R'^3\pi}{3}\frac{U'^2}{2} + 2\pi\frac{(RR')^3}{d^3}UU'(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' - 3\lambda\lambda') \quad (65)$$

Při upotřebení rovnic *Lagrange-ových* zavádíme za všeobecné souřadnice systému *Cartesiovy* souřadnice středů a, b, c, a', b', c'; U^2, U'^2 jsou dvojmoci postupných rychlostí tedy $U^2 = \dot a^2 + \dot b^2 + \dot c^2$, $U'^2 = \dot a'^2 + \dot b'^2 + \dot c'^2$; $UU'(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')$ jest součin z rychlostí a cosinu úhlu jimi sevřeného, tedy roven $(\dot a\dot a' + \dot b\dot b' + \dot c\dot c')$; $U\lambda\,.\,U\lambda'$ jest produktem průmětů obou rychlostí U, U' na přímku vedoucí od I ku II, tedy rovno

$$\left(\dot a\frac{(a'-a)}{d} + \dot b\frac{b'-b}{d} + \dot c\frac{c'-c}{d}\right)\left(\dot a'\frac{a'-a}{d} + \dot b'\frac{b'-b}{d} + \dot c'\frac{c'-c}{d}\right),$$

konečně $d^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2$.

Kinetickou energii *celku* T obdržíme připojením členů

$$\frac{m}{2}(\dot a^2 + \dot b^2 + \dot c^2); \quad \frac{m'}{2}(\dot a'^2 + \dot b'^2 + \dot c'^2),$$

kdež m, m' označují hmoty koulí.

Buďtež A, B, C, A', B', C' všeobecné komponenty sil zevních, tedy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot a}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial a} = A$ atd. *rovnice Lagrange-ovy*. Při tvoření výrazu $\frac{\partial \overline{T}}{\partial a}$ poznamenejme, že se $a, b, c, a'\ldots$ vyskytují

jen v koexistenčním členu v $\overline{T}$, tak že v $\frac{\partial \overline{T}}{\partial a}$ místo $\overline{T}$ položiti lze $\overline{T} = \pi \varrho \frac{(RR')^3}{d^3} UU' (\cos\chi - 3\cos\varepsilon\cos\varepsilon')$, při čemž jest χ úhel mezi oběma směry postupů a ε, ε' úhly mezi nimi a směrem obojstředné *I II.*

1. Předpokládejme dále, že *koule oscillují kol jistých poloh rovnovážných* s amplitudami velmi malými a se společnou periodou τ. Patrně jest $\int_0^\tau dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\right) = 0$, protože se vše po době τ vrací do původního stavu a střední hodnota zevní síly A, zvaná $\overline{A}$, bude $\overline{A} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A\, dt = -\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\partial \overline{T}}{\partial a} dt$. Úhel χ jest při tomto ustanovení stálý; $\sphericalangle \varepsilon \sphericalangle \varepsilon'$ jsou jen infinitesimálně proměnlivé. Je-li tedy $U = U_0 \sin\frac{2\pi}{\tau} t$, $U' = U'_0 \sin\frac{2\pi}{\tau}(t + \alpha)$ bude:

$$\overline{A} = -\frac{U_0 U_0'}{2} \pi\varrho (RR')^3 (\cos\chi - 3\cos\varepsilon \,.\, \cos\varepsilon') \times$$
$$\cos\frac{2\pi\alpha}{\tau} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}}\right) \tag{66}$$

Tento a podobně tvořené výrazy $\overline{B}$, $\overline{C}$ atd. označují střední hodnoty sil zevních, které na koulích účinkovati musí, aby nahoře uvedené oscillace možnými byly. Následkem toho jsou $-\overline{A}$, $-\overline{B}$, $-\overline{C}$, síly, jimiž hydrodynamické tlaky koule do pohybu uvésti hledí. Nastává tu patrně zdánlivá akce „in distans“. Dva elementárné magnety o momentech M, M' v posicích a, b, c, a', b', c' se směry magnetických os odpovídajícími kmitosměrům koulí, reagují na sebe silami A_0, B_0, které najdeme ze vzorců:*) $A_0 = -\frac{\partial T_0}{\partial a}$,

kdež $$2T_0 = \frac{M \,.\, M'}{d^3} (\cos\chi - 3\cos\varepsilon \,.\, \cos\varepsilon').$$

*) Potenciál P elementárného magnetu M' v potenc. bodě x, y, z jest

$$P = M'\left(\lambda' \frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right) + \mu' \frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right) + \nu' \frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

kdež $r^2 = (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2$. Silou X na jednotkový pól v místě xyz jest: $X = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial a'}$. Nechme bod x, y, z koincidovati po sobě jednou se severním pólem μ, po druhé s jižním $-\mu$ druhého magnetu M v posici abc,

Odtud jde, že se koule v stejné fási ($\alpha = 0$) oscillující chovají až na opáčný směr síly tak jako dva elementárné magnety, jejichž osy odpovídají kmitosměrům koulí. Dvě koule oscillující v stejné fási podél společné obojstředné se budou odpuzovati, protože dva magnety na téže přímce položené se při stejném směru magnetických os přitahují. Dějí-li se oscillace koulí v stejné fási kolmo na obojstřednou, budou se přitahovati. Při protivných fásích ($\alpha = \pi$) se směry vzájemných akcí obrátí.

2. *Jde-li o jednu kouli v nekonečné tekutině, která jest jednostranně omezena klidnou tuhou stěnou* všude do nekonečna sahající (rovinou yz), můžeme si k ní přimysliti zrcadlenou kouli i s pohybem zrcadelně symmetrickým a pak stěnu v myšlenkách odstraniti (protože se na ní z důvodu symmetrie pohyb tekutiny směrem normály díti nemůže).

Tím jest úloha redukována na předchozí problém dvou koulí.

---

jehož délka jest σ. Příslušné r budiž r'', potažmo r'. Výslednou sílu A_0, jíž M od M' podléhá, obdržíme pak, píšeme-li ve výrazu pro X místo $\frac{1}{r}\ldots$

$$\mu\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)=\mu\sigma\frac{\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}}{\sigma}=M\left(\lambda\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Jestiť totiž $\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}:\sigma\right)$ differenciálným kvocientem veličiny $\left(\frac{1}{r}\right)$ dle magnetické osy $\lambda\mu\nu$ magnetu druhého a $M=\mu\sigma$ magnetickým momentem jeho. Tím bude

$$A_0=\frac{\partial}{\partial a'}\left(\lambda'\frac{\partial}{\partial a'}+\mu'\frac{\partial}{\partial b'}+\nu'\frac{\partial}{\partial c'}\right)\left(\lambda\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Pořádek derivačních symbolů změňme tak, že $\frac{\partial}{\partial a'}$ na levém kraji pravé strany dostane se dovnitř ku $\left(\frac{1}{r}\right)$; zde nahraďme $\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right)$ symbolem $-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)$ a přenesme $-\frac{\partial}{\partial a}$ opět na kraj. Tím bude $A_0=-\frac{\partial T_0}{\partial a}$, kdež T_0 jest:

$$MM'\left(\lambda'\frac{\partial}{\partial a'}+\ldots\right)\left(\lambda\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Provedením naznačených derivací nalezneme:

$$T_0=\left[\frac{\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'}{r^3}+\frac{3}{r^5}\left(\lambda(a-a')+\mu(b-b')+\nu(c-c')\right)\right.$$
$$\left.\left(\lambda'(a'-a)+\mu'(b'-b)+\nu'(c'-c)\right)\right]MM'$$

neb $$T_0=\frac{MM'}{r^3}(\cos\chi-3\cos\varepsilon\,.\cos\varepsilon)\quad\text{ut supra.}$$

Ať se děje pohyb koule v rovině xz, tak že jest $b' = b = 0$. Osu x čítejme od stěny do tekutiny; tedy bude $a = -a'$, $c = c'$, $\dot{a} = -\dot{a}'$, $\dot{c} = \dot{c}'$. Dále jest $R = R'$ a $d = 2a$. Parametry a, b, c přísluší reálné, $a'\,b'\,c'$ zrcadlené kouli. Dle toho bude

$$U^2 = U'^2 = \dot{a}^2 + \dot{c}^2, \quad UU'(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = (\dot{a}\dot{a}' + \dot{c}\dot{c}') = \dot{c}^2 - \dot{a}^2,$$

$$UU'\lambda\lambda' = [\dot{a}(a' - a) + \dot{c}(c' - c)]\,[\dot{a}'(a' - a) + \dot{c}'(c' - c)]\,\frac{1}{d^2} = -\dot{a}^2$$

[Viz vývody následující po rovnici (65).] Z (65) obdržíme výraz pro kinetickou energii tekutiny po obou stranách stěny, příslušnou pohybům obou koulí, dané i zrcadlené. Polovice z toho repraesentuje energii tekutiny rozprostřené po jedné straně stěny a tu právě potřebujeme. Obnos její jest:

$$T_0 = \frac{\pi\varrho R^3}{3}(\dot{a}^2 + \dot{c}^2) + \frac{\pi\varrho R^6}{16a^3}(\dot{c}^2 + 2\dot{a}^2)$$

a energie systému složeného z tekutiny a koule:

$$\overline{T} = T_0 + \frac{m}{2}(\dot{a}^2 + \dot{c}^2),$$

kdež m hmotu koule označuje.

α) *Děje-li se pohyb jen směrem normály stěnové* ($\dot{c} = 0$), bude

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial a} = A, \quad \overline{T} = \frac{\dot{a}^2 f}{2}, \quad \text{kdež } f = m + \frac{2\pi R^3 \varrho}{3} + \frac{\pi\varrho R^6}{4a^3}.$$

Odtud $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{a}} = \dot{a}f$, pak $A = \ddot{a}f + \dot{a}\,\dfrac{df}{da}\,.\,\dot{a} - \dfrac{\dot{a}^2}{2}\dfrac{df}{da}$

neb $$f\,.\,\frac{d^2a}{dt^2} = A - \frac{\dot{a}^2}{2}\frac{df}{da}.$$

Vidíme, že pohyb koule se děje tak, jako by hmota její m byla zvětšena o $\dfrac{2\pi R^3\varrho}{3} + \dfrac{\pi\varrho R^6}{4a^3}$ a jako by na ni účinkovala stěna repulsivnou silou, jejíž obnos jest $-\dfrac{\dot{a}^2}{2}\dfrac{df}{da}$ čili $\dfrac{3\pi\varrho R^6}{4a^4}\,.\,\dfrac{\dot{a}^2}{2}$.

β) *Pohybuje-li se přispěním zevních sil koule parallelně ku stěně*, bude $\dot{a} = 0$, $\overline{T} = \dfrac{f}{2}\dot{c}^2$, kdež $f = m + \dfrac{2\pi R^3\varrho}{3} + \dfrac{\pi\varrho R^6}{8a^3}$.

Odtud $\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{a}}=0,\quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{c}}=f\dot{c},\quad A=-\frac{\partial \overline{T}}{\partial a}=-\frac{\dot{c}^2}{2}\cdot\frac{df}{da}=\frac{\dot{c}^2}{2}\cdot\frac{3\pi\varrho R^6}{8a^4}.$

Parallelní pohyb k stěně jest tedy jen možný, účinkuje-li na kouli zevní síla A, která má směr od stěny do tekutiny; stěna tudíž kouli přitahuje. Dále jest:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{c}}\right)=\ddot{c}f+\dot{c}\frac{df}{da}\dot{a};\quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial c}=0,$$

tedy $C=\ddot{c}f+\dot{a}\dot{c}\frac{df}{da}$ čili skrz $\dot{a}=0$ $\frac{d^2c}{dt^2}f=C.$

Vzorec lze snadno interpretovati; pohyb se děje tak, jako by hmota byla zvětšena z m na f.

Kapitola VII.

§ 45. ***Všeobecné úvahy o nevířivém pohybu rovinném.*** Chceme se zabývati nevířivými pohyby, jejichžto potenciál jest nezávislým na jedné z proměnných x, y, z, na příklad na z, tak že vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

Rychlost w jest vůbec nullou, kdežto u a v jsou stejné na přímce položené příslušným bodem x, y rovnoběžně k ose z. Hranicemi prostoru tekutinou vyplněného mohou býti jen válcové plochy rovnoběžné k ose z, sahající z nekonečna do nekonečna. (Skrz $w=0$ můžeme tekutinu ještě ohraničiti dvěma ku z kolmými rovinami.) K vůli stručnosti budeme mluviti i o hraničních křivkách v rovině xy, mínice vlastně příslušné plochy válcové. Prostor tekutinový jest následkem toho jen tehdy prostě souvislým, je-li *úplně* ohraničen *jednou* uzavřenou čarou, která eventuálně prochází nekonečně vzdálenými body roviny xy, když tekutina vůbec mezí nemá. Každou další vniternou hranicí, tedy již jedním válcem položeným skrz uzavřenou čáru uvnitř hlavní čáry pomezné stává se prostor mnohonásobně souvislým, protože nullová kontrakce čáry válec

obepínající vyloučena jest; potenciál bude tu mnohoznačným. Většina vět dříve o potenciálu odvozených platí zde bezprostředně, některé po malé modifikaci. Mluvíme-li na př o kinetické energii tekutiny, můžeme dle povahy pohybu, který se ve všech ku xy parallelních rovinách identicky opakuje, míniti jen energii tekutiny mezi dvěma takovými rovinami, které mají na př. odlehlost rovnou jedničce. Zovme ji opět T. Na nich jest $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \pm\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$; místo *plošného* integrálu $\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega$ obdržíme integrál lineárný, protože za element plochy hraničné lze považovati element pláště $ds\,.\,1$. Jde-li o pohyby necyklické, bude:

$$\frac{2T}{\varrho} = -\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds.$$

Jako dříve usuzujeme, že necyklický pohyb jest jednoznačně ustanoven, dáno-li φ neb $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ na hranicích. Zvláštní úvahy vyžaduje však případ, kdy tekutina směrem roviny xy v nekonečnu hranic nemá. Omezíme-li ji na př. kruhem (kruhovým válcem) o nekonečně velikém radiu, vymizí, jak níže ukážeme, integrál v T přes *tuto* hranici vzatý jen tehdy, je-li úhrnný „tok" z vnitřních hranic vycházející nulle roven. („*Tokem skrz křivku*" míníme součet produktů z plošných elementů $ds\,.\,1$ a z normálových rychlostí $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.) Tehdy jest potenciál podmínkami na hranicích vnitřních opět jednoznačně určen. Důkaz jest následující. Mezi kruhem (s libovolným v *konečnu* položeným středem), jenž všechny vniterné hranice v sobě uzavírá a nekonečnem jest *jednoznačný* potenciál rychlosti vyjádřený polárnými souřadnicemi r, ϑ zajisté *periodickým* úkonem úhlu ϑ a dá se dle *Fourierova* theoremu vyjádřiti řadou, jejíž jedním členem jest $\frac{\cos}{\sin}(n\vartheta)f_n(r)$. Tato partikulárná hodnota potenciálu dosazena do rovnice *Laplace-ovy* (3^a, kap. VI.)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}\cdot\frac{1}{r^2} = 0 \text{ vede ku } \frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2}f_n = 0,$$

jíž vyhovuje $f_n = r^{\pm n}$. Má-li v nekonečnu konvergovati k nulle,

volíme $f_n = r^{-n}$. Případu $n = 0$ odpovídá $f_0 = log\, r$. Lze tedy za φ položiti

$$\varphi = const + A\, log\, r + (A_1 \cos \vartheta + B_1 \sin \vartheta)\frac{1}{r}$$
$$+ (A_2 \cos 2\vartheta + B_2 \sin 2\vartheta)\frac{1}{r^2} \ldots$$

Možnost logarithmického v nekonečnu nekonečného členu vychází ostatně z přímé úvahy na jevo. Myslíme-li si na př. kruhový válec s vesměs stejným radiálným pohybem, jemuž náleží „*tok*" M, jest rychlost v distanci r od středu válce dána vzorcem: $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{M}{2\pi r}$, z čehož plyne $\varphi = \frac{M}{2\pi} log\, r + const.$

Je-li dáno více válců s libovolně předepsanými pohyby povrchovými, bude rychlost v nekonečnu až na členy velmi malé A/r, a „tok" skrz nekonečně vzdálený kruh $2\pi A$. Veličina A v řadě pro φ jest tedy rovna úhrnnému toku M dělenému na 2π. Je-li M nulle rovno, jest v nekonečnu φ o řádu $\frac{1}{R}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ o řádu $\frac{1}{R^2}$, tedy integrál v T vztažený k nekonečně vzdálené hranici nullou, čímž hořejší tvrzení dokázáno jest. Je-li M od nully rozdílné, jest obnos energie proměnlivý s polohou zevnější hranice, ale pohyb vniternými hranicemi a tokem v nekonečnu úplně určen. Rozdíl $\bar{\varphi}$ dvou možných potenciálů, které na vniterných hranicích se srovnávají s týmž φ neb $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ a v nekonečnu s týmž úhrnným tokem, jest totiž potenciálem, jehož příslušné $\bar{T}$ se rovná nulle, protože na vniterných hranicích jest buď $\bar{\varphi} = 0$ neb $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = 0$, a v nekonečnu $\bar{M} = 0$. Odtud jde, že $\bar{\varphi}$ jest veličinou stálou, čímž jednoznačnost dokázána jest. Jde-li o pohyby cyklické, připojí se příslušné potenciály ψ atd. Pohyb kol elliptického válce, který se točí neb postupuje, odvodíme z pohybu ellipsoidu, jehož osa c jest nekonečně velikou atd.

§ **46.** ***Pokračování.*** Theorie potenciálových na z nezávislých pohybů nemálo jest podporována naukou o funkcích jedné soujemné proměnné $x + iy = z$ [z má tu jiný význam nežli dříve

a jest značkou (affixem) bodu x, y v rovině xy, neb zkrátka v soujemné rovině z. Nemajíce úmysl zaváděti zbytečných novot volíme *v této kapitole* souřadnicový systém tak, jak se děje ve funkční theorii, osu x na př. na pravo, osu y nahoru].

1. Vyjdeme z okolnosti, že rovnici kontinuity $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ lze splniti bez restrikce supposicí: $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, kdež ψ se zove *Stokesovým* „úkonem proudovým"; $\psi = const$ repraesentuje totiž, jestliže konstantě rozličné hodnoty udílíme, systém proudokřivek, orthogonálných to trajektorií ku křivkám stejného potenciálu, jak již z té okolnosti vychází, že

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \,.\, -v + v \,.\, u$$

se nulle rovná. Uvážíme-li, že osa y-ová nám leží po levé ruce, hledíme-li v před směrem osy x-ové, můžeme vzorec $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ také v ten rozum interpretovati, že složka rychlosti dle libovolného směru *I* se rovná relativnému vzrostů úkonu ψ dle kolmého směru *II*, který nám leží po levé ruce, hledíme-li do předu směrem *I*. Představíme-li si, že směr *I* koinciduje se směrem výsledné rychlosti, jest $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ dle směru *II* podstatně kladné a z toho jde, že hledíme-li ve směru výsledné rychlosti, veličiny ψ na levo rostou, na pravo se zmenšují. K této okolnosti dlužno přihlížeti při správném kreslení křivek φ a ψ.

2. Vyhledáme-li si na křivce stejného potenciálu φ dva body A, B, jest „tok" skrz křivku AB čili

$$\int_{A}^{B} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \int_{A}^{B} \frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds \text{ roven: } \psi_B - \psi_A.$$

3) Pozoruhodnou vlastnost má výraz $u - \sqrt{-1}\,.\,v$; dá se totiž o něm dokázati, že jest úkonem soujemné proměnné $x + iy = z$. Derivací dle x, potažmo y obdržíme z hypothesy $u - iv = \chi(x + iy)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{-1}\,.\,\frac{\partial v}{\partial x} = \chi'(x + yi); \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\chi'(x + yi)$$

a odtud vztahy: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, které jsou dokladem pro správnost hypothesy, jde-li o pohyby nevířivé.

Ze vztahu:

$$\frac{d\varphi + i d\psi}{dx + i dy} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy\right)}{dx + i\,dy}$$

$$= \frac{(dx + i\,dy)(u - iv)}{dx + i\,dy}$$

poznáváme, že differenciál úkonu $\varphi + i\psi$ (zkrátka w zvaného) jest roven součinu o tvaru $dz f(z)$, že tedy i $w = \varphi + i\psi$ jest úkonem proměnné z, jehož definicí jest differenciálná rovnice:

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = f(z) \qquad (3)$$

4. Differenciálný kvocient $\frac{\partial w}{\partial z}$ čili $f(z)$ neb $u - iv$ jest dle fysikálného významu rychlosti úkonem podstatně *jednoznačným*, jenž v rovině z nemůže býti *nullou* neb nekonečným leda v *isolovaných* bodech. Je-li totiž $f(z)$ tedy i $\sqrt{u^2 + v^2}$ nulle rovno na *čáře* roviny xy, jest nullou i na příslušném válci, tedy na ploše, což úvahou v (§ 8. i) vyloučeno bylo. Kdyby $f(z)$ bylo *na čáře* nekonečným, bylo by $\frac{1}{f(z)} = \sigma(z)$ na ní nullou, což opět vyloučeno jest.

5. *Body, v nichž $f(z)$ jest nullou aneb nekonečným, nemohou býti body rozvětvění.* Tak na př. nemůže $u - iv = f(z)$ v bodě $z = z_1$ býti nullou dle spůsobu: $f(z) = (z - z_1)^{\frac{1}{2}}$. Neboť substitucí $z - z_1 = re^{i\vartheta}$, shledáváme, že na př. $f(z) = r^{\frac{1}{2}}.\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$, jedna to větev dvojznačné odmocniny, nabývá při přechodu od $\vartheta = 0$ do $\vartheta = 2\pi$ hodnoty jiné, zde protivně stejné, tak že by témuž bodu odpovídala dvojí rychlost (u, v) a $(-u, -v)$; což nemožné jest. Body rozvětvení mohou arciť ležeti v hranicích tekutiny, protože tu oběh dokola a tím i mnohoznačnost komponent rychlosti zamezena jest. Úkon $u - iv = f(z)$ jest tedy buď vůbec jednoznačným aneb má jakožto *jedna* větev eventuálně mnohoznačného úkonu v oblasti z, pokud tato jest zaujata částicemi tekutiny, povahu úkonu jednoznačného.

6. Je-li prostor tekutinový mnohonásobně souvislý, tekutina na příklad omezena jednou zevnější a jinými vnitřními plochami válcovými S, bude i oblast $z = x + yi$ mnohonásobně souvislou,

protože jest omezena rovněž jednou zevnější a jinými vniternými křivkami S. Spojíme-li každou čáru S libovolnou sebe neprotínající čarou F na příklad s křivkou zevnější, čítajíce obě strany F k hranicím, stane se oblast z prostě souvislou a rovněž prostor tekutinou vyplněný; válce položené skrz F hrají tu úlohu barrier. Každou v sobě uzavřenou čarou uvnitř plochy (prostoru) prostě souvisle učiněné lze pak položiti plochu v tekutině úplně obsaženou, neb jinak řečeno každou takovou čáru lze bez překročení mezí kontrahovati na bod.

7) Přiřadí-li se bodu $z = z_0$ určité $w = w_0 = \varphi_0 + i\psi_0$, jest $w = \varphi + i\psi$ v libovolném bodě z definováno rovnicí:

$$w - w_0 = \int_{z_0}^{z} dz\, f(z) = \int_{z_0}^{z} (dx + i\, dy)\,(u - iv) \qquad (4)$$

Jednoznačnost veličiny w v oblasti z (buď prostě souvislé aneb takou učiněné) vyžaduje, aby integrál na každé v sobě uzavřené křivce této oblasti se nulle rovnal. Dle *Stokesovy* věty jest toho podmínkou, aby faktory u dx a dy, to jest $X = u - iv$, $Y = i(u - iv)$ byly konečnými, spojitými a jednoznačnými úkony souřadnic x, y a aby $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ se nulle rovnalo.

Poslední podmínka jest patrně o sobě splněna při potenciálových pohybech, prvou považujeme za bezprostředně splněnou co do spojitosti a jednoznačnosti; podmínku konečnosti splníme, když eventuálně existující body o nekonečně velikém $\sqrt{u^2 + v^2}$ vyloučíme z oblasti z malými kruhy spojenými libovolnými sebe neprotínajícími čarami s hranicemi oblasti z. Kruhy, jakož i obě strany čáry čítáme pak arciť k hranicím. Považujeme-li $w = \varphi + i\psi$ za affix bodu komplexní roviny φ. ψ čili w, φ za abscissu, ψ za ordinatu, bude každému bodu oblasti z odpovídati *jeden* bod oblasti w.

Hranicí oblasti z jest pak *jedna* v sobě uzavřená nepřerušená čára, jíž v oblasti w opět uzavřená čára odpovídati musí. Je-li totiž bod A na hranici z se zřetelem na oběh kolem hranic zároveň východištěm a koncem a odpovídá-li uzavřené hranici AA otevřená čára v rovině w, odpovídá témuž A dvojí w, což není možná při ustanovení hořejším, dle nějž w pro všechny body oblasti z jednoznačným býti musí.

8. Přiřaděnost bodů v rovinách z a w jest doprovázena isogonálnou podobností nejmenších sobě přiřaděných elementů

plošných. Nahraďme jednoznačnou a dle předpokladu konečnou hodnotu diff. kvocientu $\frac{dw}{dz}$ hodnotou $Re^{i\Theta}$. Bodu $z_1 = x_1 + y_1 i$ nekonečně blízkému při $z = x + iy$ odpovídá bod w_1 blízký při w, kdež $w_1 - w$ se rovná $(z_1 - z)\frac{dw}{dz}$. Po zavedení polárných souřadnic, z nichž se úhel vždy kladně čítá proti směru rafije hodinové, jde:

$$w_1 - w = d\varrho' \,.\, e^{i\vartheta'} = Re^{i\Theta} \,.\, dre^{i\vartheta} \qquad (4^a)$$

(položíme-li $z_1 - z = dr \,.\, e^{i\vartheta}$).

Ze vztahů $d\varrho' = Rdr$, $\vartheta' = \Theta + \vartheta$ usuzujeme, že délka $d\varrho'$ jest zvětšena R-krát a směr radia $d\varrho'$ proti směru radia dr odkloněn v positivném směru o úhel Θ (jestliže si totiž osy souřadnicových systémů z a w parallelně myslíme).

Přejde-li bod z_1 do jiné blízké posice z_2 a odtud zpět do z, přejde w_1 do w_2 a zpět do w. Strany trojúhelníka $w w_1 w_2$ jsou v témže poměru R zvětšeny, tudíž oba trojúhelníky podobny. V bodech, kde modul R kvocientu dw/dz se stane nullou neb nekonečným, nastane odchylka od isogonálného zobrazení. Tyto dle předchozího ustanovení jen v hranicích oblasti z položené body obejdeme nekonečně blízkým obloukem tak, aby z ní vyloučeny zůstaly a princip podobného zobrazování nejmenších částic zůstává pak v platnosti pro celou oblast.

Děje-li se oběh $z z_1 z_2 z$ tak, že máme plochu trojúhelníka z po ruce levé, bude plocha trojúhelníka w opět ležeti po levé ruce, obíháme-li jej v pořádku korrespondujících bodů $w w_1 w_2 w$.

Řadíce jeden trojúhelník z k druhému, můžeme celou oblast z zobraziti isogonálně (konformně) na jiné oblasti w. Považujeme-li, jak se obvykle děje, za positivný oběh oblasti z ten, při kterém nám oblast po levé ruce leží a vyšetříme-li z pořádku korrespondujících bodů příslušný oběh v oblasti w, jest zobrazená oblast w opět po levé ruce. Nutno tuto okolnost důrazně vytknouti.

9. Ve veliké řadě případů můžeme za $\varphi + i\psi = w$ položiti *známý* úkon argumentu z, tak na př. $w = z^n$, $w = arc\sin z$ atd., a tímto způsobem přijíti k zajímavým rovinným pohybům tekutiny. Oddělením reálného a imaginárného najdeme $\varphi = f_1(x, y)$, $\psi = f_2(x, y)$, tedy současně polohu křivek stejného φ i ψ. (Četné příklady k tomu nalezne čtenář na př. v *Maxwellově*

„Treatise on Electr. and Magn. I.“) Mnohdy jsme v stavu oblast w na oblasti z zobraziti jen tím spůsobem, že w i z zobrazíme na třetí oblasti $Z = X + iY$. Možnost toho jde z okolnosti, že, je-li $w = F(Z)$ a $Z = \varphi(z)$, že jest i $w = f(z)$.

Pro další direktní problémy zobrazovací jest užitečno poznamenati, že

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{u - iv} = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

jest také úkonem argumentu z.

Ukončeme odstavec tento se zřetelem na pozdější potřebu poznámkou následující. Probíhá-li bod z přímou čáru a je-li při tom ve výrazu $\frac{dw}{dz}$ jen modul proměnlivým a nikoli amplituda, jest obrazem opět čára přímá. Dle (4^a) jest pak odklon $\Theta + \vartheta$ zobrazeného elementu délkového od příslušné osy abscissové veličinou stálou.

§ 47. ***Zobrazování srpovitých ploch navzájem.*** K zajímavým speciálným případům konformního zobrazování vedou jisté třídy problémů hydrodynamických. V prvé řadě obracíme se tu ku zobrazení plochy dvěma kruhovými oblouky omezené, tak zvaného srpu, na jiné ploše podobné.

1. Značiž $Z = X + iY$ plynulý bod v komplexní rovině Z, z podobný bod v rovině z, α, β, γ tři soujemné konstanty. Odpovídají-li si body $C_1 C_2$ v jedné a $c_1 c_2$ v druhé rovině, lze lineárně lomený útvar: $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$ vždy uvésti na formu:

$$\frac{Z - C_1}{Z - C_2} = K \frac{z - c_1}{z - c_2}.$$

Opisuje-li bod z kruhový oblouk jdoucí body c_1 a c_2, jest poměr distancí jeho od týchž bodů, to jest poměr modulů veličin $(z - c_1)$ a $(z - c_2)$ stálým, tedy i poměr modulů na levé straně, z čehož jde, že bod Z opisuje kruhový oblouk jdoucí přiřaděnými body C_1, C_2. Totéž zůstává v platnosti, píšeme-li všeobecněji:

$$\left(\frac{Z - C_1}{Z - C_2}\right) = K \left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^a, \tag{5}$$

kdež a označuje reálné číslo a sice kladné, ustanoví-li se vzá-

jemná přiřaděnost bodů c_1, C_1 a c_2, C_2. Z jest pak arciť mnohoznačným kořenem a bude nutno se omeziti na zobrazování kořenem jedním.

Volíme-li třetí bod c_3 libovolně, můžeme K tak ustanoviti, aby mu odpovídal libovolný bod C_3. Oblouku $c_1c_2c_3$ odpovídá pak oblouk $C_1C_2C_3$. Položíme-li nyní čtvrtým bodem c_4 a body c_1c_2 oblouk $c_1c_2c_4$, odpovídá mu v oblasti Z oblouk $C_1C_2C_4$, tedy i každému bodu uvnitř srpu $c_1c_2c_3c_4$ určitý bod v srpu $C_1C_2C_3C_4$.

Differenciálný kvocient $\frac{dZ}{dz}$ jest, jak se snadno přesvědčíme, všude konečným a od nully rozdílným, vyjímajíc rohy srpu c_1 a c_2. Zobrazení srpů na sobě děje se tudíž všude dle principů podobnosti až na tyto body. V sousedství jednoho z nich lze až na veličiny velmi malé položiti $Z-C_1=M(z-c_1)^a$,

kdež
$$M=M_0e^{i\mu}=K\frac{C_1-C_2}{(c_1-c_2)^a}.$$

Substitucí: $Z-C_1=Re^{i\Theta}$, $z-c_1=re^{i\vartheta}$ obdržíme:

$$Re^{i\Theta}=M_0r^ae^{i\mu+ia\vartheta}.$$

Při kladném a jest R současně s r nekonečně malým, odpovídá tedy výseku kruhovému o nekonečně malém radiu r se středem v c_1 podobný výsek se středem v C_1. Ale úhly radii opsané *nejsou* stejné. Z relace $\Theta=\mu+a\vartheta$ neb $d\Theta/d\vartheta=a$ jde, že Θ roste $a$krát rychleji než ϑ, tak že srpu, jenž v bodě c_1 má úhel ϑ_0, odpovídá srp s úhlem $\Theta_0=a\,.\,\vartheta_0$.

Následkem toho máme z (5) po malé transformaci:

$$\left(\frac{Z-C_1}{Z-C_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}}=K\left(\frac{z-c_1}{z-c_2}\right)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}} \qquad (6)$$

Relací (6) zobrazuje se srp roviny z o úhlu ϑ_0 na jiném srpu o úhlu Θ_0 v rovině Z, při čemž rohům c_1, c_2 odpovídají rohy C_1, C_2.

2. Stane-li se srpový úhel roven π, přejde srp v plochu kruhovou. Značí-li z' novou komplexní rovinu, lze vztahem:

$$\left(\frac{z'-c'_1}{z'-c'_2}\right)^{\frac{\pi}{\pi}}=\frac{z'-c'_1}{z'-c'_2}=K'\left(\frac{z-c_1}{z-c_2}\right)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}} \qquad (6^a)$$

zobraziti srp (z, ϑ_0) na *kruhu* v rovině z' tak, aby si odpovídaly

body c_1, c'_1, a c_2, c'_2. Podobně zobrazíme srp Θ_0 roviny Z na kruhu opět v jiné komplexní rovině z'' relací:

$$\frac{z''-c''_1}{z''-c''_2}=K''\left(\frac{Z-C_1}{Z-C_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}} \qquad (6^b)$$

Avšak i oba kruhy lze jakožto srpy o úhlu π na sobě zobraziti, položíme-li za z'' lineárný lomený úkon argumentu $z' \ldots z''=\frac{z'\alpha+\beta}{z'\gamma+1}$. Konstanty α, β, γ lze zvoliti tak, že kruhovým bodům c'_1, c'_2 v rovině z' odpovídá v rovině z'' dvojice bodů c''_α, c''_β *rozdílná* od c''_1, c''_2. Poněvadž ale kruh z'' jest též na srpu $\Theta_0 Z$ zobrazitelný (relací 6^b) a poněvadž jeho bodům c''_α, c''_β neodpovídají v Z rohy C_1, C_2, nýbrž dva body jiné, bude také možná *srp* $z\vartheta_0$ zobraziti na srpu $Z\Theta_0$ tak ale, aby rohům c_1. c_2 neodpovídaly již rohy C_1, C_2 nýbrž dva jiné body a vice versa. Zobrazovacím úkonem jest nahoře udaná souvislost: $z''=\frac{z'\alpha+\beta}{z'\gamma+1}$, do níž za z' a z'' dosadíme hodnoty z (6^a) (6^b). Z relace (6^a) vychází, že z' jest lineárnou funkcí srpového výrazu $\left(\frac{z-c_1}{z-c_2}\right)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}}$; z rovnice ($6^b$), že z'' jest podobným úkonem veličiny $\left(\frac{Z-C_1}{Z-C_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}}$. Dosadíme-li do vztahu (z', z''), shledáme, že také $\left(\frac{Z-C_1}{Z-C_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}}$ bude lineárně lomeným úkonem argumentu $\left(\frac{z-c_1}{z-c_2}\right)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}}$ a vice versa. Touto zobrazovací funkcí lze pak srp s úhlem ϑ_0 v rovině z zobraziti na srpu Θ_0 v rovině Z tak, aby rohům jednoho c_1, c_2 neodpovídaly již rohy druhého, nýbrž dva body jiné. Posice rohů c_1, c_2, C_1, C_2 bývají v dotyčných rovinách veličinami danými, a následkem toho lze tři v lineárně lomeném tvaru se vyskytující konstanty tak zvoliti, aby třem libovolným bodům na jednom srpu odpovídaly tři jiné na srpu druhém.

3. Speciálným tvarem srpu (v rovině z) jest pruh o šířce b, omezený dvěma z nekonečna do nekonečna sahajícími rovnoběžkami, t. j. plocha obsažená mezi přímkami $y=\pm\frac{b}{2}$. Lze

jej považovati za limitu srpu utvořeného dvěma kruhovými oblouky o stejném radiu křivosti R, kteréž oba přivracejí svou konkavitu k ose x-ové. Položme tedy pro konečné ještě R, $c_2 = -c_1$, kdež $x = c_1$ jest rohem srpu na pravo a $x = -c_1$ na levo. Je-li ϑ_0 úhel srpový, bude, jak ze snadně sestrojitelného nákresu

poznáme, $$\frac{b}{2} = R\left(1 - \cos\frac{\vartheta_0}{2}\right),\quad c_1 = R\sin\frac{\vartheta_0}{2},$$

tedy $$\lim R = \infty,\quad c_1 = \frac{b}{2}\cot g\frac{\vartheta_0}{4} = \frac{2b}{\vartheta_0},$$

$$\left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}} = \left(\frac{\frac{z\vartheta_0}{2b} - 1}{\frac{z\vartheta_0}{2b} + 1}\right)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}} = (-1)^{\frac{\pi}{\vartheta_0}} e^{-\frac{\pi z}{b}}$$

Poslední výraz, tedy i $e^{\frac{\pi z}{b}}$, musí býti lineárně lomeným úkonem veličiny $\left(\frac{Z - C_1}{Z - C_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}}$, má-li se nekonečný pruh zobraziti na srpu $(Z\Theta_0)$ tak, aby třem libovolným bodům na pruhu odpovídaly tři libovolné body na srpu.

§ 48. ***Schwartzův***) **problém zobrazovací.*** Budiž $t = \tau + \tau'\sqrt{-1}$ bodem v rovině soujemné t. Na *reálné* ose volme si body $t_1 < t_2 < t_3 \ldots, < t_n$ (viz obr. 7.) a vyšetřme útvar v rovině Z zobrazený úkonem $Z = f(t)$ definovaným rovnicí:

$$\frac{dZ}{dt} = C(t - t_1)^{\mu_1 - 1}(t - t_2)^{\mu_2 - 1} \ldots (t - t_n)^{\mu_n - 1}, \tag{7}$$

když proměnná t obejde hranice hořejší půl roviny t (viz obr. 7.). Veličiny μ buďtež vesměs reálné. Jde tedy o zobrazení půlroviny t. V bodech $t_1 \ldots t_n$ stane se $\frac{dZ}{dt}$ nullou neb nekonečně velikým, vyloučíme je tedy nekonečně malými půlkruhy spůsobem z nákresu zřejmým (viz obr. 7.) z půlroviny t a čítáme půlkruhy k hranicím jejím. Uvnitř není pak bodu, pro nějž by $\frac{dZ}{dt}$ bylo nullou neb nekonečným a dráha, již opíše bod Z v rovině Z,

*) *Schwartz*, Borchardt J. sv. 70. *Schwartzovu* methodu applikoval na fysikálné problémy (theorii kondensátoru) poprvé *Kirchhoff*. Werke p. 101.

bude v sobě uzavřenou. Samo sebou se rozumí, že k zobrazení používáme vždy jen jedné větve mnohoznačného úkonu $\frac{dZ}{dt}$ a že zobrazená Z *oblast* leží po levé ruce, hledíme-li do předu směrem pohybujícího se bodu Z.

Z rovnice (7) vidíme, že, pohybuje-li se proměnná t *mezi* dvěma po sobě jdoucími body na př. t_2, t_3, se znamení u žádné z differencí $t - t_i$ nezmění. Všechna t jsou tu reálná, tedy bude v našem příkladě $t - t_2$, $t - t_1 > 0$; $t - t_3$, $t - t_4, \ldots t - t_n < 0$. Totéž se stane, pohybuje-li se t mezi $t = -\infty$ a $t = t_1$, aneb mezi $t = t_n$ a $t = +\infty$.

Každý z faktorů $(t - t_i)^{\mu_i - 1}$ lze uvésti na součin z *proměnlivého* modulu a veličiny $(\pm 1)^{\mu_i - 1}$; amplituda každého faktoru, tudíž i amplituda diff. kvocientu $\frac{dZ}{dt}$ jest následkem toho neměnitelná. Pohybu bodu t po reálné ose mezi dvěma body (t_i, t_{i+1}) neb mezi $(t = -\infty$ a $t_1)$ neb $(t_n, t = \infty)$ odpovídá tudíž *rovnočarý* pohyb obrazového bodu Z. Tak vznikají v oblasti Z přímky $(t_{-\infty} t_1)$, $(t_1 t_2) \ldots$, z nichž dvě po sobě jdoucí jsou spojeny kruhovým obloukem buď o nekonečně malém neb nekonečně velikém radiu, obrazem to nekonečně malého půlkruhu kolem bodu t_i roviny t.

Tak na př. máme v nejbližším sousedství bodu t_2 až na veličiny vyššího řádu místo (7) rovnici:

$$\frac{dZ}{dt} = M (t - t_2)^{\mu_2 - 1},$$

kdež $M = C (t_2 - t_1)^{\mu_1 - 1} . (t_2 - t_3)^{\mu_3 - 1} \ldots$ a integrací

$$Z = Z_2 + \frac{M}{\mu_2} (t - t_2)^{\mu_2} \text{ pro } \mu_2 \gtrless 0,$$

potažmo $\quad Z = Z_2 + M \log (t - t_2)$ (je-li $\mu_2 = 0$).
Z_2 jest integrační konstanta.

Položme $Z - Z_2 = Re^{i\Theta}$, $t - t_2 = re^{i\vartheta}$, $M = \mu_2 M_0 e^{i\gamma}$.
Odtud jde $R = M_0 r^{\mu_2}$, $\Theta = \gamma + \mu_2 \vartheta$ pro $\mu_2 \gtrless 0$.

Je-li μ_2 kladné, odpovídá nekonečně malému půlkruhu kolem t_2 nekonečně malý kruhový oblouk v Z příslušný k úhlu $\Theta_2 = \mu_2 \pi$ a oběh po obou obloucích děje se v témže směru (rafiky hodinové, děje-li se oběh reálné osy půlroviny „t“ z leva na pravo). Z_2 jest pak obrazem bodu t_2 a zároveň průsekem

prodloužených obrazových přímek t_1t_2, t_2t_3 roviny Z a Θ_2 úhlem jimi sevřeným (viz obr. 8.).

Je-li jiné μ, na př. μ_3 záporné, nastupuje v rovině Z na místo nekonečně malého oblouku mezi (t_2t_3) a (t_3t_4) oblouk o nekonečně velikém radiu co do angulárné velikosti rovný $(-\mu_3)\pi$ a proběhnutý bodem Z *proti* směru rafije hodinové, protože $\frac{d\Theta}{d\vartheta} = \mu_3$ jest podstatně záporné (viz obr. 8.).

Na celém nekonečném oblouku ∞ *přísluší pak bodům* Z *až na infinitesimálnou veličinu totéž* t, málo rozdílné od t_3. Této okolnosti v pozdějším častěji použijeme.

Je-li jedno μ, na př. $\mu_3 = 0$, stanou se přímky (t_2t_3) a (t_3t_4) souběžnými, jsouce opět spojeny obloukem v nekonečnu. Zde máme patrně $Z = Z_2 + M \log r + M i\vartheta$.

Zbývá ještě vyšetřiti obraz půlkruhu roviny t o nekonečně velikém radiu r (viz obr. 7.), jenž půlrovinu t dohromady s reálnou osou z a jejími obloučky úplně ohraničuje. Pro nekonečně veliká t máme dle rovn. (7)

$$\frac{dZ}{dt} = C \,.\, t^{\nu}, \quad \text{kdež} \quad \Sigma(\mu_i) - n = \nu,$$

a pro $\nu \gtrless 0$
$$Z = const + \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Je-li $\nu + 1 \geqq 0$, jsou přímky roviny Z: $(t_n,\ t = \infty)$ a $(t_{-\infty} t_1)$ spojeny obloukem o nekonečně velikém radiu; pro $\nu + 1 < 0$ obloukem nekonečně malým. Nahlédneme to substitucí: $t = re^{i\vartheta}$, která vede ku:

$$Z - const = Re^{\iota\Theta} = \frac{Cr^{\nu+1}}{\nu+1} \,.\, e^{\iota\vartheta(\nu+1)},$$

neb položíme-li $C = C_0 e^{\iota\gamma}$ ku:

$$R = \frac{C_0 r^{\nu+1}}{\nu+1}, \quad \Theta = \gamma + \vartheta(\nu+1) \quad (\text{pro } \nu + 1 \gtrless 0).$$

Pro $\nu = -1$ máme $Z = const + C \log t$; řečené krajní přímky $(t_{-\infty} t_1)$ a $(t_n t_\infty)$ oblasti Z stanou se pak rovnoběžnými.

Obrazem půlroviny t *v oblasti* Z *jest tedy útvar omezený jednak protínajícími se přímkami, jestliže v limitě obloučky nekonečně malého radia v* Z *s body splynouti necháme, jinak oblouky o nekonečně velikém radiu.*

Jsou-li na př. $\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_n$ vesměs kladné, jest obrazem reálné osy t lomená čára $(-\infty t_1)$, $(t_1 t_2)$, $(t_2 t_3) \ldots$, $(t_n \infty)$; bodům t_1, t_2, t_n v oblasti t odpovídají pak rohy $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n$ s úhly Θ_1, $\Theta_2 \ldots, \Theta_n$. Krajní dvě přímky jsou spojeny buď nekonečně velikým obloukem (divergence) aneb obloukem velmi malým (průsek) aneb jsou rovnoběžny. Místo rovn. (7) máme tu:

$$\frac{dZ}{dt} = C\,(t-t_1)^{\frac{\Theta_1}{\pi}-1}\,(t-t_2)^{\frac{\Theta_2}{\pi}-1} \ldots (t-t_n)^{\frac{\Theta_n}{\pi}-1} \qquad (7^a)$$

Příklady.

A) Zobrazení nekonečného pruhu na půlrovině t. Mysleme si místo pruhu obdélník, jehož střed leží v počátku souřadnicového systému XY. Strany jeho buďtež rovnoběžné k osám XY. Levý dolní roh zovme *1*, pravý dolní *2*, pravý horní *3* a levý horní *4*. Obíhajíce obvod ve směru *1234*, máme plochu obdélníka po levé ruce. Na reálné ose komplexní roviny t odpovídejtež rohům obdélníka body $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Všechny úhly Θ_i rovnají se $\frac{\pi}{2}$, bude tedy dle (7^a):

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{C}{\sqrt{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}} \qquad (8)$$

Přejde-li obdélník v pruh, posunou se čáry *23* a *14* do nekonečna, stanou se oblouky kruhovými o ∞ radiu a jelikož nemohou býti obrazem nekonečně velikého půlkruhu t, kterémuž dle (8) náleží oblouk nekonečně malý, musí býti obrazy neskonale malých půlkruhů kol $t = \frac{t_2 + t_3}{2}$ a $\frac{t_1 + t_4}{2}$; bude tedy třeba dle dřívějšího v limitě položiti $t_2 = t_3$, $t_1 = t_4$, tedy

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{C}{(t-t_1)(t-t_2)} \quad \text{neb} \quad Z = K + \frac{C}{t_1 - t_2} \log \frac{t - t_1}{t - t_2}.$$

O správnosti výsledku lze se snadno přesvědčiti. Bodům t_1, t_2 odpovídají patrně v nekonečnu ležící hranice pruhové. Volíme-li C reálné, jest i $\frac{C}{t_1 - t_2}$ reálným. Obrazem reálné osy t od $t = t_1$ do $t = t_2$ jest tedy přímka. V blízkosti bodu t_2 položme: $re^{i\vartheta} = t - t_2$, $t - t_1 = t_2 - t_1$. Tím obdržíme:

$$Z = K - \frac{C}{t_1 - t_2} \log r - i \frac{C}{t_1 - t_2} \vartheta + \frac{C}{t_1 - t_2} \log (t_2 - t_1).$$

Oběhne-li bod t malý půlkruh kol t_2 od $\vartheta = \pi$ od $\vartheta = 0$, zvětší se Z o $(Z_{\vartheta=0} - Z_\pi) = i\frac{C}{t_1 - t_2}\pi$; bod Z pohybuje se tudíž parallelně k ose Y-ové nahoru. Je-li b šířka pruhu, bude $Z_0 - Z_\pi = ib$, a následkem toho $\frac{C}{t_1 - t_2} = \frac{b}{\pi}$ a

$$Z = K + \frac{b}{\pi}\log\frac{t - t_1}{t - t_2}, \quad \text{neb} \quad \frac{t - t_1}{t - t_2} = e^{\frac{\pi Z}{b}} K'. \quad \text{atd.}$$

Řešíme-li tuto rovnici dle t, shledáme, že t jest lineárnou lomenou funkcí veličiny $e^{\frac{\pi Z}{b}}$ a vice versa a *tímto úkonem lze půlrovinu t zobraziti na nekonečném pruhu Z tak, že si tři libovolné body na obvodech odpovídají.* Ku konci předchozího odstavce jsme nalezli, že lze nekonečný pruh v oblasti Z*) zobraziti podobným způsobem na srpu v oblasti ζ s rohy c_1, c_2 a úhlu Θ_0, když $e^{\frac{\pi Z}{b}}$ položíme rovným lineárně lomené funkci srpového výrazu $\left(\frac{\zeta - c_1}{\zeta - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}}$. *Odtud jde, že lze nekonečnou půlrovinu t na srpu* ζ, c_1, c_2, Θ_0 *zobraziti, položíme-li za t lineárnou lomenou funkci výrazu* $\left(\frac{\zeta - c_1}{\zeta - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\Theta_0}}$. Třem libovolným bodům na pruhu odpovídají pak při vhodném určení konstant tři libovolné body na reálné ose půlroviny t.

Příklad B. V oblasti z (viz obr. 9.) nalézá se plocha omezená lomenou čarou *1234567* a nekonečným obloukem spojujícím body *18*. Jdouce směrem *12 . . . 8* dokola, máme oblast z, kterou na t zobraziti jest, po levé ruce. Lze tedy rohům *2*, *3 . . .* 7 přiřaditi na reálné ose t body t_2, $t_3 \ldots t_7$. Je-li, jak předpokládáme, systém *123 . . . 78* symmetrický kol Ox, přiřadíme bodu O' uprostřed mezi *4*, *5* hodnotu $t = 0$, bodům *5* a *4* hodnoty $t_5 = \eta$, $t_4 = -\eta$, $t_6 = 1$, $t_3 = -1$, $t_7 = \varepsilon$, $t_2 = -\varepsilon$, kdež $\varepsilon > 1$. Že ku t_6 přidružujeme $t = 1$, dá se tím odůvodniti, že míra, jíž t vyměřujeme, jest libovolná. Úhly Θ při *2367* jsou $\frac{3\pi}{2}$, při *4* a *5 . . .* $\frac{\pi}{2}$.

*) Jsou tu jiná písmena volena než-li v § předchozím; na místo dřívějších z Z nyní Z a ζ pak c místo C.

Máme tudíž dle (7^a):

$$\frac{dz}{dt} = C\sqrt{\frac{(t^2-1)(t^2-\varepsilon^2)}{t^2-\eta^2}} \tag{7^b}$$

Patrně jest:

$$\int_{t=0}^{t=\eta} \frac{dz}{dt}\,dt = \pm Ci\int_{0}^{t=\eta} dt\sqrt{\frac{(1-t^2)(\varepsilon^2-t^2)}{\eta^2-t^2}} = -\frac{Bi}{2}, \tag{8}$$

když B jest odlehlostí bodů (*4*, *5*) neb (*3*, *6*). Integrál jest skrz $0<t<\eta<1<\varepsilon$ reálný a kladný, volíme-li v něm kořeny kladně; musí tedy C býti reálným. O znamení $\pm$ rozhoduje znamení konstanty C a o tomto, která větev dvojznačného úkonu $\frac{dz}{dt}$ k zobrazení zvolena byla. V nekonečnu jest dle (7^b) až na veličiny vyššího řádu $\frac{dz}{dt} = C\sqrt{t^2}$. Volíme-li větev $\frac{dz}{dt} = +Ct$, musí C býti záporné; neboť v místech, kde jako na př. u (8) má t velmi značnou hodnotu kladnou, pohybuje se bod Z na levo a $\frac{dx}{dt}$, tudíž i $\frac{dz}{dt}$ jest tu podstatně záporným. V rovnici (8) třeba pak podržeti znamení horní, protože B jest podstatně kladné.

Padne-li v obrazci (9) spojka *45* daleko na levo, jest η extremně malým a splyne s $t=0$, protože *405* jest pak obloukem o nekonečně velikém radiu, jenž odpovídá malému půlkruhu kolem $t=0$. Při velmi malém η máme z (8)

$$-\frac{B}{2} = C\varepsilon\int_0^{\eta}\frac{dt}{\sqrt{\eta^2-t^2}} = C\varepsilon\,.\Big/_{t=0}^{\eta} arc\,sin\,\frac{t}{\eta} \quad \text{čili } C = -\frac{B}{\pi\varepsilon} \tag{8^a}$$

Přejde-li spojka (45) do nekonečna, obdržíme tím $\eta=0$, a místo rovnice (7^b), v níž za C hodnota z (8^a) zavedena byla:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{B}{\pi\varepsilon}\,\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2-\varepsilon^2)}}{t} \tag{9}$$

Zbývající neurčitou veličinu ε určíme z integrálu:

$$\int_{t=1}^{t=\varepsilon}\frac{dz}{dt}\,dt = -\frac{\beta i}{2},$$

(od bodu *6* do *7*), kdež β jest *danou* tlouštkou desky (*67*) neb (*23*).

Že lomená čára *123 . . . 8* (v obrazci 9) *jest* obrazem reálné osy t, bylo dříve všeobecně dokázáno. Poznamenejme následující. Na horní desce *1234* jsou všechna t záporná, na dolní kladná, bodu *1* odpovídá $t = -\infty$, bodu *8* . . . $t = \infty$; musí tedy nekonečný oblouk *81* v obrazci (9), který se od 2π jen infinitesimálně liší, býti obrazem nekonečného půlkruhového oblouku $t = re^{i\vartheta}$, vedoucího od $\vartheta = 0$ ku $\vartheta = \pi$ [v oblasti t (obr. 7).]. Že tomu tak jest, přesvědčíme se kladouce v (9) $t = \infty$. Obdržíme:

$$\frac{dz}{dt} = - \frac{Bt}{\pi\varepsilon} \quad \text{neb:} \quad z = const - \frac{B}{\pi\varepsilon} \cdot \frac{t^2}{2},$$

pak:

$$z - const = Re^{i\Theta} = F_0 e^{i\gamma} \cdot r^2 \cdot e^{2\vartheta}$$

(při vhodné volbě konstant). Nekonečně velikému r odpovídá tedy nekonečně veliké R, a rychlost, kterou Θ roste, jest skrz $d\Theta / d\vartheta = 2$ dvakrát tak veliká, jako oblouková rychlost bodu t, oblouku π odpovídá tudíž v obraze 2π.

§ **49.** ***Hydrodynamické příklady.*** Představme si, že s leva od nekonečna, tedy od $\varphi = -\infty$, proudí tekutina (viz obr. 9.) mezi nekonečnými, rovnoběžnými deskami *1234*, *5678*, vystupujíc otvorem *3*, *6* do nekonečné roviny omezené obloukem *81*. Jedna z proudokřivek *5678* sleduje, ***předpokládáme-li naprostou kontinuitu pohybů***, dolní stěnu podél její záhybů. Příslušné ψ její budiž $\psi = -\frac{\psi_1}{2}$. Ve směru $O'O$ jde proudokřivka $\psi = 0$ rovnou cestou do nekonečna. Konečně máme proudokřivku *4321*, jíž přísluší $\psi = \frac{\psi_1}{2}$. Patrně jest $\frac{\psi_1}{2} - \left(-\frac{\psi_1}{2}\right) = \psi_1$ úhrnným proudem vystupujícím z (*3*, *6*), tudíž na levo v nekonečnu rychlost toku: ψ_1 / B (viz pag. 148.). Na nekonečném půlkruhu v obrazci (9.) jest $\varphi = \infty$.

Úlohou jest najíti $w = \varphi + i\psi = f(x + iy) = f(z)$. Příslušnou ku z oblastí w jest patrně nekonečný pruh (o šířce ψ_1, omezený přímkami $\psi = \pm \frac{\psi_1}{2}$ a dvěma oblouky v nekonečnu: $\varphi = \pm \infty$), jenž se na nekonečné půlrovině t dá zobraziti tím, že t položíme rovným lineárně lomenému úkonu veličiny $e^{\frac{\pi w}{\psi_1}}$. Integrujíce rovnici (9), najdeme úkon $z = F(t)$ neb $t = f(z)$.

jenž zobrazí oblast z, tekutinou vyplněnou rovněž na půlrovině t. Eliminujeme-li t tím způsobem, že $f(z)$ položíme rovným lineárně lomenému úkonu veličiny $e^{\frac{\pi w}{\psi_1}}$, zobrazili jsme pruh w na oblasti z. Konstanty úkonu máme k disposici. Bližší výpočet chceme provésti ve dvou speciálných případech.

α) Jsou-li obě parallelné desky v obrazci (9.) infinitesimálně *tenké*, to jest splynou-li body (*2*, *3*), potažmo (*6*, *7*), bude $\varepsilon = 1$, a místo rovn. (9) máme

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{B}{\pi}\left(t - \frac{1}{t}\right), \quad z = \frac{B}{\pi} \log t - \frac{Bt^2}{2\pi} + const \qquad (10)$$

Leží-li počátek souřadnic xy uprostřed mezi body *3*, *6* (obr. 9.), bude pro $t = 1$ $z = -i\frac{B}{2}$, tedy

$$z = -i\frac{B}{2} - \frac{B}{2\pi}(t^2 - 1) + \frac{B}{\pi} \log t \qquad (10^a)$$

Pro pruh máme, jak již řečeno:

$$t = \frac{\alpha e^{\frac{\pi w}{\psi_1}} + \beta}{\gamma e^{\frac{\pi w}{\psi_1}} + 1} \qquad (11)$$

Konstanty $\alpha\beta\gamma$ se určí následovně: Pro $t = 0$ jest $\varphi = -\infty$, tedy $\beta = 0$; pro $t = \pm\infty$ (body *8* a *1* v obrazci 9.) jest $\varphi = \infty$, tedy $\gamma = 0$.

Arbitrárnou konstantu v potenciálu rychlosti volme tak, aby v obrazci (9.) ku rohům *3* a *6* náleželo $\varphi = 0$. Ku (*6*) náleží pak $w = -i\frac{\psi_1}{2}$, a zároveň $t = 1$. Odtud jde $\alpha = +i$, $t = ie^{\frac{\pi w}{\psi_1}}$. Nalezené t dosadíme do (10^a).

Volme k vůli pohodlí rychlost toku $\frac{\psi_1}{B}$ mezi deskami tak, že jest $\psi_1 = \pi$ a obdržíme:

$$z = \frac{B}{2\pi}(1 + e^{2w} + 2w), \quad x = \frac{B}{2\pi}(1 + 2\varphi + e^{2\varphi} \cos 2\psi),$$

$$y = \frac{B}{2\pi}(2\psi + e^{2\varphi} \sin 2\psi).$$

Pro $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ jest skutečně $y = \pm \frac{B}{2}$, $x = \frac{B}{2\pi}(1 + 2\varphi - e^{2\varphi})$. Je-li $\varphi = -\infty$, jest $x = -\infty$; je-li $\varphi = 0$, jest $x = 0$, je-li $\varphi = +\infty$, jest opět $x = -\infty$.

Pro roh desky, na př. $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 1$ jest

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{B}{2\pi} \Big/ (2 - 2e^{2\varphi})_{\varphi = 0}$$

nullou, rychlost pohybu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ tedy nekonečně velikou.

β) Předpokládejme, že v obrazci (9.) stěny *32*, *67* jsou nad míru dlouhé, tak že body *7* a *2* padnou do nekonečna. Dá se uhodnouti. že hodnoty $t = \pm \varepsilon$ jim příslušné se stanou nekonečně velikými, tak že obdržíme z rovn. (9):

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{B}{\pi} i \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} \tag{12}$$

Na trati (*67*), kde $t > 1$, pohybuje se bod z skutečně dle $-y$ do nekonečna. Integrací máme:

$$z = -\frac{Bi}{\pi}(\sqrt{t^2 - 1} - arc\, tg \sqrt{t^2 - 1}) + const.$$

Ze vztahů $(t = 1,\ z = -\frac{B}{2} i)$ určí se $const = -\frac{B}{2} i$.

Substitucí $t = ie^w$ obdržíme buď:

$$z = -\frac{Bi}{2} - \frac{Bi}{\pi}(\sqrt{-1 - e^{2w}} - arc\, tg \sqrt{-1 - e^{2w}}) \tag{13}$$

aneb také skrz $arc\, tg\,(iw) = \frac{i}{2} \log \frac{1 + w}{1 - w}$

$$z = -\frac{Bi}{2} + \frac{B}{\pi}\left(\sqrt{e^{2w} + 1} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2w}}}{1 - \sqrt{1 + e^{2w}}}\right) \tag{14}$$

Položíme-li: $\psi = -\frac{\pi}{2}$, $w = \varphi - i\frac{\pi}{2}$, obdržíme

$$z = -\frac{Bi}{2} - \frac{Bi}{\pi}(\sqrt{e^{2\varphi} - 1} - arc\, tg \sqrt{e^{2\varphi} - 1}) \quad \text{pro } \varphi > 1,$$

$$z = -\frac{Bi}{2} + \frac{B}{\pi}(\sqrt{1 - e^{2\varphi}} - \log(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1})) \quad \text{pro } \varphi < 1.$$

Průběh proudokřivky $\psi = -\frac{\pi}{2}$ jest pro intervall $1 < \varphi < \infty$ dán zápornou osou y-ovou od $y = -\frac{B}{2}$ do $-\infty$, kdežto intervallu $-\infty < \varphi < 1$ odpovídá parallela k ose x-ové daná rovnicí $y = -B/2$ a sahající od $x = -\infty$ do $x = 0$.

Podobný jest průběh proudokřivky $\psi = \frac{\pi}{2}$. Řešení jest tedy správné.

γ) Jak v tomto, tak lze jednati i v jiných případech, kdy hranice tekutiny, dílem sahajíce do nekonečna dílem jsou omezeny lomenými přímkami. V rozích Θ_i oblasti z, jimž přiřaděny jsou v rovině t body t_i, jest rychlost toku buď nullou neb nekonečně velikou. Prvé nastane, je-li $\Theta_i < \pi$, to jest, je-li roh v tekutině měřený menší než 180°, tedy ve stěně $> 180°$; druhé při $\Theta_i > \pi$. Výrok tento lze dokázati z relace:

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \left(\frac{dw}{dt} \Big/ \frac{dz}{dt}\right) \qquad (14^a)$$

V sousedství bodu $t = t_i$ máme totiž dle (7^a)

$$u - iv = M \frac{dw}{dt} (t - t_i)^{1 - \frac{\Theta_i}{\pi}}.$$

V skutečných tekutinách nemůže tlak klesnouti na zápornou, tím méně na hodnotu nekonečně zápornou, která by dle vzorce (20, kap. II.) odpovídala rychlosti nekonečně veliké, v předchozích příkladech se vyskytující. Z toho soudíme, že nemůže vždy býti správnou hypothesa, dle které by se určitá proudokřivka stěny ustavičně přidržovati měla i při překročení rohů stěnových. V skutečnosti není tudíž vždy možná, aby se zachovala naprostá kontinuita rychlostí. Opustí-li na př. (obr. 9.) proudokřivky (*56*) a (*43*) stěny u bodů *6*, potažmo *3*, musí vniknouti do prostoru jakožto *hranice paprsku*, po jehož jedné straně jest klid, po druhé pohyb, tedy diskontinuita.

Hypothesa podržuje arciť svou platnost, když se jedná o ustálené proudění tak zv. fluidu elektrického. Usuzujeme to z okolnosti, že na př. galvanické odpory vodivého systému vypočítané na základě jejím souhlasí naprosto s hodnotami měřenými.

Mathematické methody zde upotřebené konají ostatně platnou službu v jistých problémech elektrostatických, na př. při výpočtu kapacit kondensatorů (viz *Kirchhoff* l. c.).

§ 50. ***Rozpojité pohyby tekutin, tvary paprsků.*** Na hranicích paprsku sousedí klidná tekutina, eventuálně prázdný prostor, s tekutinou se pohybující a musí tu v každém bodě splněna býti podmínka vyjadřující kontinuitu tlaku. Je-li tok ustálený, jest paprsek omezen proudokřivkami a jde o úlohu, z formy nádoby a otvoru najíti tvar paprsku. Řešení se dosud povedlo jen pro jisté případy nevířivých pohybů závislých na *dvou* souřadnicích, když buď tekutina proudí jako paprsek do téže tekutiny klidné aneb když není silám podrobena. Uvedený předpoklad má totiž za následek, že rychlost na povrchu paprsku se stane všude *veličinou stálou*, čímž se řešení značně usnadní. Dle rovnice (20, kap. II.) máme pro klidnou tekutinu mimo paprsek (e) $p_e = \varrho_e [S_e - P]$, pro vnitřek ($i$) paprsku: $p_i = \varrho_i [S_i - P - \frac{1}{2} V^2]$. Veličiny $S_e S_i$ nezávisí na x, y, z; ϱ_e, ϱ_i jsou příslušné hustoty mimo paprsek a v něm. Potenciál zevních sil P považujeme za úkon naprosto spojitý, tok za ustálený. Kontinuita tlaků na rozhraní $p_e = p_i$ vyžaduje podmínku

$$\varrho_i S_i - \varrho_e S_e - P(\varrho_i - \varrho_e) - \varrho_i \tfrac{1}{2} V^2 = 0. \qquad (15)$$

Je-li $\varrho_i = \varrho_e$ aneb $P = 0$, jest, jak uvedeno, na povrchu paprsku $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ veličinou stálou. Bez újmy všeobecné platnosti klademe za ni: $V = 1$.

Předpokládejme, že tekutina vytryskuje z nádoby vytvořené dvěma k sobě v úhlu ω skloněnými rovinami (viz obr. 10.) a že jakožto paprsek pokračuje až do nekonečna, kde se směr jeho již nemění. Oblast z jí zaujatá jest omezena stěnami nádoby, povrchem paprsku, tedy *dvěma* proudokřivkami ψ, průřezem paprsku BC v nekonečnu, kde jest $\varphi = \infty$ a čarou stejného potenciálu $\varphi = -\infty$ (viz obr. 10.). Této oblasti z přísluší v komplexní rovině $w = \varphi + i\psi$ jakožto obraz nekonečný pruh omezený proudokřivkami $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ *) a přímkami $\varphi = \pm \infty$. Úloha, najíti tvar paprsku, redukuje se tudíž na nalezení příslušné funkce zobrazovací. Zobrazení dá se zprostředkovati pomocí soujemné veličiny ζ, definované rovnicí:

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{u - iv} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + i \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \qquad (16)$$

---

*) Protože nezáleží na arbitr. konstantě v ψ, volme $\psi_2 = 0$ (viz obr. 10.).

Položme $\zeta = \xi + \eta i$ a považujme ξ, η za souřadnice bodu v komplexní rovině ζ, volíce k vůli zjednodušení následujících výkonů mathematických jak osy xy, tak $\varphi\psi$ i $\xi\eta$ rovnoběžnými.

Geometrická povaha obrazu ζ jest tato. Pohybuje-li se bod z po povrchu paprsku od *1* do *B* (viz obr. 10.), jest $\sqrt{u^2+v^2}=1$, tudíž i modul veličiny ζ stálým a rovným jedničce; následkem toho opisuje bod ζ v oblasti své kružnici o poloměru $= 1$. Příslušné body *1'*, *B'* lze najíti následující úvahou. Je-li v některém bodu oblasti z u i v známo, lze dle vzorců

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \eta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{17}$$

najíti obraz jeho v oblasti ζ tím způsobem, že na parallelu ke směru výsledné rychlosti vedenou bodem $\xi = \eta = 0$ (bod *0'* v obr. 11.) naneseme reciprokou rychlost. V bodu *1*, kde *končí* stěna, má tekutina ještě její směr a rychlost od oné volného paprsku nekonečně málo rozdílnou. Vedeme tedy skrz *0'* (obr. 11.) parallelu *0'1'* ku stěně *A1* a naneseme na ni délku $= 1$. V bodě *B* má paprsek již stálý směr a v celém průřezu touž rychlost jako na povrchu. Vedeme-li parallelu skrz *0'* k tomuto směru, přijdeme, nanesouce délku $= 1$, ku bodu (*B'*, *C'*), který jest obrazem celého průřezu paprskového *BC*. Po překročení jeho jde bod z zpět do bodu 2 (obr. 10.) a následkem toho bod ζ (viz obr. 11.) po kružnici o radiu $= 1$ do bodu *2'*, který leží na přímce *0'2'* již jsme vedli rovnoběžně ku (*2D*) v obrazci (10.). Jde-li z (v obr. 10.) po *2D* do nekonečna $\varphi = -\infty$, zůstává ζ na čáře *0'2'* a jelikož *mod* ζ přejde z jednice na $\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)_D$, kdež $(\sqrt{u^2+v^2})_D$ jest neskonale malé,*) dostane se ζ po *0'2'* rovněž do nekonečna do *D'*. Jde-li bod z po oblouku $\varphi = -\infty$ z *D* do *A*, zůstává $\sqrt{u^2+v^2}$ trvale nekonečně malým, bod ζ opíše tudíž oblouk *D'A'* v nekonečnu (viz obr. 11.), až se dostane na radius *0'1'*, po kterém se vrátí do bodu *1'*, když se byl bod z z *A* do *1* navrátil.

Oblast z tekutinou zaujatá jest tedy v rovině ζ (obr. 11.) *zobrazena plochou omezenou dvěma radii 2'D', 1'A' a dvěma koncentrickými*

---

*) Tok skrz *AD* vstupující a u *12* vystupující jest konečný, tudíž při *divergenci* stěn *1A*, *2D* rychlost při $\varphi = -\infty$ neskonale malá.

oblouky, z nichž prvý má radius $=1$, *druhý* $=\infty$. Oblast ζ lze vztahem $\zeta = \bar{\zeta}^{\frac{\omega}{\pi}} . C_0 e^{i\gamma}$ zobraziti v nové rovině $\bar{\zeta}$ na podobném útvaru (obr. 12.) $I\bar{A}\bar{D}II\bar{B}I$ tak, že si body *1'I*, *2'II* a $B\bar{B}$ odpovídají, tedy na *pravoúhlém* srpu $\bar{\zeta}$, jehož rohy leží u *I* a *II*, a jehož jeden oblouk ($I\bar{A}$, $II\bar{D}$) má radius nekonečně veliký. Položíme-li totiž $\zeta = re^{i\vartheta}$, $\bar{\zeta} = \bar{r}e^{i\bar{\vartheta}}$ máme: $re^{i\vartheta} = (\bar{r})^{\frac{\omega}{\pi}} C_0 e^{i(\gamma + \frac{\omega}{\pi}\bar{\vartheta})}$ neb $r = (\bar{r})^{\frac{\omega}{\pi}} C_0$, $\vartheta = \gamma + \frac{\omega}{\pi}\bar{\vartheta}$. Nekonečně velikému $\bar{r}$ odpovídá při $\omega > 0$ nekonečné r a je-li $C_0 = 1$, jsou r i $\bar{r}$ současně jedničkou; oblouk ϑ roste $\frac{\omega}{\pi}$-krát rychleji nežli $\bar{\vartheta}$ a proto opíše průvodič v ζ oblouk ω, opsal-li průvodič v $\bar{\zeta}$ oblouk π.

Je-li $\bar{\vartheta} = 0$, jest dle obr. (11.) $\vartheta = -\varepsilon$,*) tedy $\gamma = -\varepsilon$ a zobrazovacím úkonem jest

$$\zeta = e^{-\varepsilon i} . \bar{\zeta}^{\frac{\omega}{\pi}} \tag{18}$$

Proudokřivce *A1B* v obrazci (10.) přiřaďme $\psi = 0$, proudokřivce *D2C* $\psi = \psi_1$, kdež ψ_1 jest enenciálně kladné, označujíc absolutní hodnotu proudu skrz *12*. K vůli pohodlí zvolíme $\psi_1 = \pi$. Oblast z máme, tak zní hlavní naše úloha, zobraziti v oblasti $w = \varphi + i\psi$ na nekonečném pruhu o šířce π. Postup bude ten, že zobrazíme prostřednictvím pomocné oblasti $\bar{\zeta}$ oblast ζ na w úkonem $\zeta = f(w)$ neb $\frac{dz}{dw} = f(w)$, kdež pak integrací vlastního cíle dojdeme. Relací

$$\left(\frac{\bar{\zeta} - 1}{\bar{\zeta} + 1}\right)^2 = \frac{a . e^w + \beta}{e^w + \gamma} \tag{19}$$

lze dle § 48. *A* srp v obrazci (12.) o rozích $\bar{\zeta} = \pm 1$ a úhlu $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ zobraziti na nekonečném pruhu v oblasti w o šířce $b = \pi$, tak že si odpovídají tři body; tedy lze pomocí (18) pruh w zobraziti

---

*) Úhel ε označuje dohromady s $\measuredangle\, \omega$ (viz obr. 10. a 11.) angulárnou posici stěn vůči souřadnicovým systémům. Angulárná posice směru paprsku v nekonečnu jest ustanovena úhlem $\omega' + \varepsilon$ (viz obr. 11.).

na útvaru ζ v obrazci (11.) vzorcem

$$\left(\frac{(e^{\varepsilon i}\zeta)^{\frac{\pi}{\omega}}-1}{(e^{\varepsilon i}\zeta)^{\frac{\pi}{\omega}}+1}\right)^2=\frac{\alpha e^w+\beta}{e^w+\gamma} \tag{19}$$

Konstanty α, β, γ lze ustanoviti následovně. Pro $\varphi=\infty$ či $w=\infty$ jest dle obraze (11.) $\zeta=1\,.\,e^{-(\omega'+\varepsilon)i}$, tedy

$$\alpha=\left(\frac{e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi i}-1}{e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi i}+1}\right)^2=-tg^2\frac{\omega'\pi}{2\omega} \tag{20}$$

Při $\varphi=-\infty$, neb $w=-\infty+i(\ \ )$, jest modul ζ roven ∞, tedy $\beta=\gamma$. Konečně můžeme skrz arbitrárnou konstantu vězící ve φ pro bod *1* voliti $\varphi=0$, tedy i $w=0$. Tomu odpovídá $\zeta=e^{-\varepsilon i}$. Odtud jde

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\gamma}=\left(\frac{1^{\frac{\pi}{\omega}}-1}{1^{\frac{\pi}{\omega}}+1}\right)^2=0,\quad \text{pak}\quad \alpha=-\beta,$$

jestliže mnohoznačnou potenci

$$\zeta^{\frac{\pi}{\omega}}=(\xi+\eta i)^{\frac{\pi}{\omega}}=[\varrho\,(cos\,\chi+i\,sin\,\chi)]^{\frac{\pi}{\omega}}$$

definujeme *jedním* z kořenů a sice hodnotou

$$\varrho^{\frac{\pi}{\omega}}\left(cos\,\chi\,\frac{\pi}{\omega}+i\,sin\,\chi\,\frac{\pi}{\omega}\right)$$

a bod $\zeta=\xi=1$ přiřadíme ku $\chi=0$.

Ze vztahu (19) jde konečně výraz:

$$\frac{(e^{\varepsilon i}\,\zeta)^{\frac{\pi}{\omega}}-1}{(e^{\varepsilon i}\,\zeta)^{\frac{\pi}{\omega}}+1}=\sqrt{\frac{\alpha\,(e^w-1)}{e^w-\alpha}} \tag{21}$$

(v němž kořen dvojznačným jest), jímž určíme ζ čili $\frac{dz}{dw}$, a integrací $z=const+F(w)$.

Posice stěn nádoby, t. j. úhly ω, ε, jakož i souřadnice rohů *1*, *2*, tedy z_1 a z_2 jsou veličiny dané. Lze tedy určiti netoliko integrační konstantu, nýbrž i ω', to jest směr, jenž má paprsek v nekonečnu. Svírají-li (viz obr. 10.) obě stěny týž úhel s parallelou k ose y-ové vedené průsekem jejich a leží-li rohy *1*, *2* na parallele k ose x-ové, bude osa paprsku v nekonečnu rovnoběžna ose y-ové, tedy $\varepsilon + \omega' = \frac{\pi}{2}$ (viz obr. 11.).

Specialisace 1. Budiž $\omega = \pi$, $\varepsilon = 0$, tedy $\omega' = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = -tg^2 \frac{\pi}{4} = -1$ (dle 20). Z (21) jde: $\frac{\zeta - 1}{\zeta - 1} = \sqrt{\frac{1 - e^w}{1 + e^w}}$

neb
$$\zeta = \frac{dz}{dw} = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1} \qquad (22)$$

V nekonečnu $w = + \infty + i(\quad)$ má paprsek směr záporné osy y-ové, nutno tudíž pro $w = \infty$ voliti kořen záporně, tak že tu jest
$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{d\varphi} = \frac{dx}{d\varphi} + i \frac{dy}{d\varphi} = - i.$$

Průběh proudového vlákna $\psi = 0$, jemuž $w = e^\varphi$ náleží, najdeme pak z rovnic
$$\frac{dz}{dw} = \frac{dx}{d\varphi} + i \frac{dy}{d\varphi} = e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}.$$

Pro $\psi = 0$, $\varphi > 0$, tedy pro *jednu* hranici paprsku máme
$$\frac{dx}{d\varphi} = e^{-\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}$$
a integrací
$$x = C - e^{-\varphi}, \quad y = C' + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - log\left(e^\varphi + \sqrt{e^{2\varphi} - 1}\right).$$

Leží-li rohy *1*, *2* ($\varphi = 0$) na ose x-ové, jest $C' = 0$. V nekonečnu určí se šířka paprsku z kvanta prostupujícího, které jest π, a z rychlosti, která jest jedničce rovna, na obnos π. Následkem toho jest pro $\varphi = \infty$
$$x_\infty = - \frac{\pi}{2} = const \quad \text{a} \quad x = - \left(e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Při výtoku ($\varphi = 0$) jest pak šířka paprsku $2 + \pi$, tedy $\frac{\pi}{2 + \pi} = 0{\cdot}61$

koefficientem tak zvané „*venae contractae*". Rovnici křivky paprskové najdeme, eliminujíce φ z výrazů pro x a y nahoře napsaných.

Specialisace 2. Budiž $\omega = 2\pi$ (viz obr. 10.), v němž se levá i pravá stěna vertikálně dolů stočiti musí. Tekutina tu proudí radiálně z pláště nekonečného válce k centru a odtéká mezi oběma rovinami tvoříc v nich paprsek (viz obr. 13.). Zde jest jako dříve $\varepsilon + \omega' = \frac{\pi}{2}$; dle obr. (10.), v němž ω přešlo v 2π, bude

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2}, \text{ tedy } \omega' = \pi, \quad \zeta . e^{\varepsilon i} = \frac{\zeta}{i}, \quad \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -tg^2\frac{\pi}{4} = -1$$

(dle 20), pak z (21)

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = i\left(2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1}\right) \qquad (23)$$

Znamení dvojznačného kořene třeba akkomodovati okolnosti, že se proudokřivka $\psi = 0$ (viz obr. 13.) při výstupu $\varphi = 0$ kloní na pravo, tak že $\frac{dx}{d\varphi}$ tu musí býti kladné. Snadně se přesvědčíme, že jest nutno kořen voliti záporně. Položíme-li $\psi = 0$, obdržíme pro $\varphi > 0$, tedy pro konturu *paprsku* rovnici

$$\frac{dx}{d\varphi} = 2e^{-\varphi}\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = 2e^{-2\varphi} - 1 \qquad (24)$$

a integrací

$$x = C - arc\sin e^{-\varphi} - e^{-\varphi}\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}, \quad y = C' - \varphi - e^{-2\varphi} \qquad (25)$$

Pro $\varphi = 0$ jest (viz nákres 13.) $y = 0$, tedy $C' = 1$, protože osa x-ová spojuje rohy *1*, *2*. V nekonečnu jest šířka paprsku opět π, tedy $x = -\frac{\pi}{2}$, protože osa y-ová jde skrz prostřed paprsku. Mnohoznačný arcus sinus v (25) lze se zřetelem k tomu, že s integrační konstantou additivně spojen jest, vždy tak voliti, aby pro $\varphi = \infty$ $arc\sin 0$ byl nullou. Tím obdržíme $C = -\frac{\pi}{2}$; pak ale bude pro $0 < \varphi < \infty$ nutno voliti $arc\sin e^{-\varphi}$ v kvadrantu prvém, protože $e^{-\varphi}$ jde od $e^{-\infty} = 0$ do $e^0 = 1$. Tím bude

$$x = -\left(\frac{\pi}{2} + arc\sin e^{-\varphi} + e^{-\varphi}\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}\right) \qquad (26)$$

Pro $\varphi = 0$ jest $x = -\pi$, tedy šířka paprsku v otvoru 2π a koefficient „venae contractae“ $\frac{\pi}{2\pi} = 0{\cdot}5$. Pro $\varphi < 0$ stane se $arc\ sin\ e^{-\varphi} = arc\ sin\ (>1)$ imaginárním, zrovna jako $\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}$. Nejlépe je tu výraz (23)

$$\frac{dz}{dw} = i\left(2e^{-2\varphi} - 1 - 2e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right) = \frac{dz}{d\varphi}$$

přímo integrovati. Pozorujeme $\frac{dx}{d\varphi} = 0$, že tedy proudokřivka $\psi = 0$, než mezi roviny vnikla, běžela po *zevní* straně levé stěny. Tento speciálný případ byl prvým (*Helmholtzem*) podaným dokladem pro možnost rozpojitých pohybů. Rozšíření theorie děkuje se *Kirchhoffovi* (viz Abhandl. p. 406.).

§ 51. ***Náraz paprsku na pevnou stěnu.*** Z nekonečna ($\varphi = -\infty$, viz obr. 14.) běží paprsek s původně rovnočarými a rovnoběžnými konturami $\psi = -\psi_1$, $\psi = \psi_2$ proti pevné stěně *ESF* a rozdělí se na ní v paprsky *dva*. Jedno z prostředních proudových vláken, kterému skrz arbitrárnou konstantu v ψ vězící můžeme přidružiti hodnotu $\psi = 0$, musí se tedy rozpoltiti na *dvě.* V místě *S*, kde se to stane, jest rychlost patrně nullou, protože dvojí rychlost odpovídající dvěma směrům proudokřivky $\psi_0 = 0$ tam panovati nemůže. Vlákno $\psi = 0$ běží odtud na levo i na pravo, napřed podél stěny, pak jako kontura paprsku do nekonečna ($\varphi = \infty_{\text{I}}$, $\varphi = \infty_{\text{II}}$) (viz obr. 14.). Celému průřezu paprsku při $\varphi = -\infty$ odpovídá v oblasti ζ (viz obr. 15.) jediný bod, podobně ($\varphi = -\infty$) označený a položený na kružnici o radiu rovném jedničce, je-li jako dříve rychlost na povrchu paprsku (a po celých průřezech $\varphi = \pm\infty$) za jedničku zvolena.

Dráha, kterou opisuje bod z v obr. 14., jest šípy označena: vede po proudokřivce $\psi = -\psi_1$ od $\varphi = -\infty$ do $\varphi = \infty_{\text{I}}$, přestoupí průřezem paprsku na $\psi = 0$, vede do E odtud k neskonale malému půlkruhu, na němž oběhne bod S, odtud po $\psi = 0$ do $\varphi = \infty_{\text{II}}$ a po překročení průřezu paprskového při $\varphi\ \infty_{\text{II}}$ po $\psi = \psi_2$ do $\varphi = -\infty$ a jeho průřezem zpět do východiště. Dráha opsaná bodem ζ jest v obrazci 15. podobně označena, při čemž podotýkáme, že dráze ES odpovídá $E'S'$, kdež S' v nekonečnu ležeti musí, protože při S jest rychlost pohybu neskonale malou.

Malému polokruhu kolem S odpovídá pak v ζ nekonečný půlkruh $S'S''$, dráze SF v obr. (14.) dráha $S''F'$ v obr. (15.) atd.

Oblast tekutinová z jest tedy zobrazitelna v rovině ζ na pravoúhlém srpu o rozích F', E', jimž přísluší $\zeta = 1$, $\zeta = -1$. Oblast z lze zobraziti též v rovině $w = \varphi + i\psi$ a sice na nekonečném pruhu omezeném čarami $\psi = -\psi_1$, $\psi = \psi_2$, $\varphi = +\infty$, $\varphi = -\infty$ a *oběma* stranami čáry $\psi = 0$, $\varphi > 0$ (viz obr. 16.). (Neboť skrz arbitrárnou konstantu vězící ve φ můžeme bodu S [obr. 14.] přiřaditi $\varphi = 0$, tak že jeho w jest nullou). Postup počtu bude ten, že obr. (16.) to jest oblast w zobrazíme na nekonečné půlrovině t (obr. 7.), jelikož však na ní dle předchozích vývodů lze zobraziti oblast ζ (obr. 15.), nalezneme eliminujíce t způsob, jak w zobraziti na ζ čili na $\frac{dz}{dw}$. Vypočte-li se odtud $\zeta = \frac{dz}{dw} = f(w)$, lze integrací najíti $z = F(w)$. Zabývejme se napřed úlohou prvou, to jest zobrazením obrazce (16.) na obrazci (7.).

Mysleme si v obr. (16.) čáru $\psi = 0$, $\varphi > 0$ napřed dvojitou a spojenu kratičkou čarou $V VI$, jak to vytečkovaně naznačeno jest a ohraničme pruh spojkami *45*, *67*, *89*. Při tom odpovídá oblouk *45* průřezu paprsku $\varphi = \infty_I$ v obrazci (14.), čára *5V* proudokřivce $\psi = 0$ od $\varphi\,\infty_I$ přes E do S, čára $V\,VI$ půlkruhu kolem S, čára *VI 6* cestě (SF, $\psi = 0$, $\varphi = \infty_{II}$). Oblast w (obr. 16.) lze zobraziti na nekonečné půlrovině t pomocí (7^a). Úhly u *4*, *5*, *6*, *7* jsou $\frac{\pi}{2}$, u V, $VI \ldots \frac{3\pi}{2}$. Mimo to jest $t_4 = t_5$, $t_6 = t_7$ protože oblouky *45*, *67* leží v nekonečnu. Přiřadíme-li bodu $w = 0$ uprostřed V, VI $t = 0$, což dovoleno jest, bude t_V, t_{VI} v limitě nullou a zobrazovací úkon jest dle (7^a) dán rovnicí:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C\sqrt{(t-t_V)(t-t_{VI})}}{\sqrt{(t-t_5)(t-t_6)(t-t_4)(t-t_7)}} = \frac{Ct}{(t-t_5)(t-t_6)} \quad (27)$$

O správnosti vzorce (27) lze se následovně přesvědčiti. Kladná t nalézají se na *horní* partii figury 16., při *8* jest $t = \infty$; záporná t jsou na spodní partii a při *9* jest $t = -\infty$. Čáře *89* odpovídá v t rovině nekonečný půlkruh od $t = \infty$ do $t = -\infty$. V této části: jest totiž $\frac{dw}{dt} = \frac{C}{t}$, $w = C \log t + K$. Dosadíme-li $t = re^{i\vartheta}$, máme $w = C \log r + i C\vartheta + K$. Přejde-li na řečeném oblouku t roviny ϑ z o na π, klesne w o $w_{\vartheta=0} - w_{\vartheta=\pi} = -\pi i C$,

což se ale rovná $i\psi_2 - (-i\psi_1) = i(\psi_1 + \psi_2)$, (viz obr. 16.), tak že odtud máme

$$C = -(\psi_1 + \psi_2)/\pi \tag{28}$$

Dráze *6*, *7* odpovídá na reálné ose t (viz obr. 7.) oběhnutí půlkruhu kol t_6 od $\vartheta = \pi$ do $\vartheta = 0$. Neboť máme pro body blízké při $t = t_6$ dle (27):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Ct_6}{t_6 - t_5} \cdot \frac{1}{t - t_6}; \; w = K + \frac{Ct}{t_6 - t_5} \log(t - t_6) = \frac{Ct_6}{t_6 - t_5}(\log r + \iota\vartheta) + K$$

a odtud podobnou úvahou:

$$\psi_2 = -\frac{Ct_6}{t_6 - t_5}\pi.$$

Oblouk (*45*) odpovídá půlkruhu kol $t = t_5$; odtud podobným způsobem: $\psi_1 = \frac{Ct_5\pi}{t_6 - t_5}$, tedy: $\frac{\psi_2}{\psi_1} = -\frac{t_6}{t_5}$

a jako dříve $C\pi = -(\psi_1 + \psi_2)$. Protože míra, jíž t měříme, jest libovolná, lze t_6 položiti rovno *1*, a následkem toho $t_5 = -\frac{\psi_1}{\psi_2}$. Je-li tedy ψ_1 a ψ_2 dáno, lze ve vzorci (27) C, t_5 a t_6 považovati také za dané.

Další úvahy chceme si však zjednodušiti supposicí, že se *prostřední* proudokřivka paprsku rozpolťuje. Poněvadž jí náleží $\psi = 0$ bude $\psi_2 = \psi_1$, $t_5 = -1$. Podmínky toho budou později vyšetřeny. Ze (27) jde pak:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C \cdot t}{t^2 - 1}, \text{ pak: } \frac{w}{C} = \tfrac{1}{2} \log(t^2 - 1) + K \tag{29}$$

Ku $w = 0$ (viz obr. 16.) náleží $t = 0$, jest tedy $K = -\frac{1}{2}\log(-1) = -\frac{\pi i}{2}$ a dle (29) a (28)

$$1 - t^2 = e^{-\frac{w\pi}{\psi_1}} \text{ neb } t = \sqrt{1 - e^{-\frac{w\pi}{\psi_1}}} \tag{30}$$

Oblasti w a ζ, jež se zobrazují na téže figuře z, zobrazují se také na sobě, a jelikož oblast ζ jest pravoúhlým srpem s rohy $\zeta = \pm 1$ o příslušné funkci $\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2$, můžeme ji dle (§ 48. *A*) zobraziti na půlrovině t tím, že klademe za t lineárně lomený

úkon funkce srpové $\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2$. Položíme-li za t hodnotu z (30), zobrazili jsme ζ na oblasti w úkonem:

$$\sqrt{1 - e^{-\frac{\pi w}{\psi_1}}} = \frac{\alpha\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 + \beta}{\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 + \gamma} \qquad (31)$$

Poznamenejme k vůli dalšímu, že při substituci $mod\, \zeta = 1$ a $\zeta = \cos\chi + i \sin\chi$ jest v platnosti

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = - tg^2 \frac{\chi}{2} \qquad (32)$$

Konstanty v (31) určíme z následujících podmínek. Pro $\varphi = -\infty$ (viz obr. 15.) jest $\zeta = \cos(\omega + \pi) + i \sin(\omega + \pi)$, kdež ω jest *daný* úhel, totiž onen, který leží mezi osou dopadajícího paprsku $\psi = 0$ a kladnou osou x-ovou. Odtud máme, protože levá strana v (31) jest při $\varphi = -\infty$ nekonečně veliká.

$$\gamma = -\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = tg^2 \frac{\omega + \pi}{2} = cotg^2 \frac{\omega}{2} \qquad (33)$$

Pro $w = 0$, kde se vlákno $\psi = 0$ rozpolťuje, jest modul ζ nekonečný, levá strana v (31) nullou, tedy $\beta = -\alpha$. Je-li $\varphi = \infty_{\mathrm{I}}$, jest dle (32) $\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = - tg^2 \frac{\omega_1 + \pi}{2} = - cotg^2 \frac{\omega_1}{2}$,

kdež ω_1 přísluší (neznámému) směru osy levého paprsku v nekonečnu. V rovině w (obr. 16.) přísluší ku $\varphi = \infty_{\mathrm{I}}$ čára (45), na níž jest $t = -1$, tedy bude tu dle vzorce (30) $\sqrt{1 - e^{\frac{w\pi}{\psi_1}}} = -1$, což do (31) dosazeno dává:

$$-1 = \frac{\alpha\left[\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 - 1\right]}{\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 + \gamma};$$

odtud pomocí (33)

$$\alpha = \frac{\sin\frac{\omega_1 - \omega}{2} \cdot \sin\frac{\omega + \omega_1}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \qquad (34)$$

Je-li $\varphi = \infty\pi$, jest $\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = -cotg^2 \frac{\omega_2}{2}$, kdež ω_2 určuje směr *pravého* paprsku (viz obr. 15.). Příslušným obloukem ve w jest 67, tedy $t = 1$. Podobně jako dříve nalézáme:

$$\alpha = \frac{-sin\left(\frac{\omega_2 - \omega}{2}\right) sin \frac{\omega + \omega_2}{2}}{sin^2 \frac{\omega}{2}} \tag{35}$$

Z (34) a (35) jde

$$cos\,\omega = \frac{cos\,\omega_1 + cos\,\omega_2}{2} \tag{36}$$

Úhly ω_1 a ω_2 jsou patrně kladné a $< \pi$. *Jestliže tedy paprsek kolmo dopadá a jeho centrálné vlákno* $\psi = 0$ *se větví*, bude $\omega_2 = \pi - \omega_1$ *a paprsky rozdvojené budou k prvému symmetrické.* Tím obdržíme pomocí (30), (31) hlavní vzorec:

$$t = \sqrt{1 - e^{-\frac{w\pi}{\psi_1}}} = -\frac{m\zeta}{1 + \zeta^2 + 2\zeta\, cos\,\omega}, \tag{37}$$

kdež $$m = \frac{4\alpha}{1 + \gamma} = 4\,.\,sin \frac{\omega_1 - \omega}{2}\, sin \frac{\omega_1 + \omega}{2} \tag{38}$$

Z rovnice (37) najde se $z = f(w)$ integrací. Uvažujme jednotlivé detaily problému. Poloha rohů desky v obrazci (14) jest *dána* souřadnicemi $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, neb $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, položíme-li x-ovou osu do desky EF. Do bodu S, kde vlákno $\psi = 0$ narazilo, a jemuž $w = 0$ a $t = 0$ náleží, položíme počátek souřadnic. Na *pravé* straně SF jest na *desce* $\psi = 0$, $\varphi > 0$ a roste, $\zeta = \frac{dz}{dw}$ čili zde $\frac{dx}{d\varphi}$ je kladné a reálné. Příslušné t nalézá se v obrazci (16) na $VI\,6$ a jest také kladné. Musí tedy dle (37) m býti záporné a dle (38) $\omega > \omega_1$. Na levo od S v obr. (14) jest t záporné ($5\,V$ v obrazci 16), tudíž i odmocnina v rovnici (37).

Odlehlost $SF = \delta_1$ bodu nárazového S od pravého kraje desky F, jemuž $w = w_1$ a $\zeta = 1$ náleží, jest

$$\delta_1 = \int_{w=0}^{w_1} \frac{dz}{dw} dw = \int_{w=0}^{w_1} \zeta\, dw = \Big/_{w=0}^{w_1} w\zeta - \int_{\zeta=+\infty}^{\zeta=1} w\,.\,d\zeta = w_1 + \int_1^{\infty} w\,.\,d\zeta \tag{39}$$

Hodnotu w_1 najdeme ze (37), kladouce $\zeta = 1$ pomocí vzorce:

$$1 - e^{-\frac{w_1 \pi}{\psi_1}} = \frac{m^2}{4(1 + \cos\omega)^2}.$$

Dodejme ještě důkaz, že v (39) $(w\zeta)$ limite $w = 0$ se annulovati musí, jak mlčky supponováno bylo. Ku $w = 0$ neb správněji mluveno k bodu velmi blízko na pravo od S (obr. 14.) položenému náleží v obrazci (15) bod S'', tedy $\zeta = \infty$. Pro velmi malé w jest $\sqrt{w}$ o řádu $\frac{1}{\zeta}$, jak rozvojem exponencielly v (37) okamžitě seznáme, tedy $lim(w\zeta) = lim\frac{\zeta}{\zeta^2}$ při limitě $w = 0$ skutečně nullou. Levý kraj desky E jest od bodu nárazu vzdálen o δ_2; náleží mu $z = -\delta_2$ $\zeta = -1$. Bude tedy podobně:

$$(-\delta_2) = \int\limits_{w=0}^{w_2} \zeta\, dw = \Big/_{w=0}^{w_2} w\zeta - \int\limits_{\zeta=-\infty}^{\zeta=-1};$$

(protože zde ku $w = 0$ náleží $\zeta = -\infty$), pak

$$\delta_2 = w_2 + \int\limits_{-\infty}^{-1} w\, d\zeta \ldots, \tag{40}$$

kdež
$$1 - e^{\frac{w_2 \pi}{\psi_1}} = \frac{m^2}{4(1 - \cos\omega)^2}.$$

Integrace dle w ve vzorcích (39) a (40) byly nahrazeny, což zde pohodlnějším se býti jeví, integracemi dle ζ. Provedou-li se tyto (pomocí 37), obsahuje součet $\delta_1 + \delta_2$, daný to výraz, jen neznámou m, kterou odtud vyšetřiti lze; tím se naleznou z (38) a (36) *směry* obou parciálných paprsků (určené úhly ω_1 a ω_2), z (35) konstanta α, konečně z (40) poloha místa δ_2, kde vlákno $\psi = 0$, patrně přímočaré, desku stihnouti musí. (Při jiné situaci desky vůči paprsku rozpoltí se jiné nežli vlákno středové a počet jest těžší.)

***Specialisace** A*). Je-li průřez dopadajícího paprsku extremně tenký proti rozměru desky $\delta_1 + \delta_2$, bude pro kladná φ (to jest na desce a na paprsku) $\sqrt{1 - e^{-\frac{w\pi}{\psi_1}}}$ téměř rovno jedné, výraz ζ

bude stálý a identický jak na paprsku sekundárném, tak na desce, z čehož následuje, že sekundárné paprsky se rozejdou v protivných směrech desky.

Specialisace B). Je-li dopadající paprsek extremně široký, viz obr. (17.), tedy ψ_1 nad míru veliké, obdržíme rozvinutím exponencielly v (37) v řádu pro *konečná w*, která v blízkosti desky existovati musí:

$$\sqrt{w} = -m\sqrt{\frac{\psi_1}{\pi}} \cdot \frac{\zeta}{1+\zeta^2+2\zeta\cos\omega} \tag{41}$$

ψ_1 jest nekonečně veliké, tudíž m nekonečně malým, to jest dle (38) $\omega = \omega_1$; oba sekundárné paprsky mají pak v nekonečnu směr paprsku dopadajícího. Označíme-li podstatně zápornou konstantu $m\sqrt{\frac{\psi_1}{\pi}}$, kteráž má tvar $0.\infty$, písmenem $2f$, bude:

$$w = 4f^2\left(\frac{\zeta}{1+\zeta^2+2\zeta\cos\omega}\right)^2;$$

položíme-li $\zeta = \pm 1$, obdržíme:

$$w_1 = \frac{f^2}{(1+\cos\omega)^2}, \quad w_2 = \frac{f^2}{(1-\cos\omega)^2},$$

tedy dle (39) a (40):

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &\doteq f^2\left(\frac{1}{(1+\cos\omega)^2} + 4\int_1^{\infty}\frac{\zeta^2\,d\zeta}{(1+\zeta^2+2\zeta\cos\omega)^2}\right) \\ \delta_2 &= f^2\left(\frac{1}{(1-\cos\omega)^2} + 4\int_{-\infty}^{-1}\frac{d\zeta\,.\,\zeta^2}{(1+\zeta^2+2\zeta\cos\omega)^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Integrál v δ_1 transformuje se substitucí $\zeta = \frac{1}{\eta}$ na

$$I = \int_0^1 \frac{d\eta}{(1+\eta^2+2\eta\cos\omega)^2};$$

integrál v δ_2 vznikne z předchozího, položí-li se za $\omega \ldots \pi-\omega$. Substitucí $\eta + \cos\omega = \lambda$ přejde I v

$$\int_{\cos\omega}^{1+\cos\omega}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+\sin^2\omega)^2} \quad \text{neb} \quad \frac{1}{\sin\omega^3}\int_{\cot g\,\omega}^{\cot g\frac{\omega}{2}}\frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^2},$$

který se další substitucí $\lambda = cotg\,\chi$ redukuje na

$$\frac{1}{sin\,\omega^3}\int\limits_{\frac{\omega}{2}}^{\omega}\frac{d\chi\,(1-cos\,2\chi)}{2} = \frac{1}{4\,sin\,\omega^3}\,(\omega - sin\,2\omega + sin\,\omega).$$

Tím bude z (42):

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{f^2}{sin\,\omega^4}\,(4 + \pi\,sin\,\omega),$$

$$\delta_1 = f^2\left(\frac{\omega}{sin\,\omega^3} + \frac{2}{(1 + cos\,\omega)\,sin^2\,\omega} - \frac{2\,cos\,\omega}{sin^2\,\omega}\right) \qquad (43)$$

Veličina f jest podstatně záporná, $(-f) = g$ podstatně kladné. Je-li f z délky desky $\delta_1 + \delta_2$ určeno, najdeme z rovnice (41)

$$\sqrt{w} = 2g\,\frac{\zeta}{1 + \zeta^2 + 2\zeta\,cos\,\omega};$$

$$\zeta = \left(\frac{g}{\sqrt{w}} - cos\,\omega\right) - \sqrt{\left(\frac{g}{\sqrt{w}} - cos\,\omega\right)^2 - 1}\;{}^{*)} \qquad (44)$$

Pro kolmý dopad máme (viz obr. 15.) $\omega = \frac{\pi}{2}$, dle (43) $\delta_1 = \delta_2$ a $g = \sqrt{\frac{\delta_1 + \delta_2}{4 + \pi}}$; z (44) obdržíme:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{g}{\sqrt{w}} - \sqrt{\frac{g^2}{w} - 1}, \qquad (45)$$

což integrováno dává

$$z = 2g\sqrt{w} - \sqrt{w\,(g^2 - w)} - g^2\,arc\,sin\sqrt{\frac{w}{g^2}}, \qquad (46)$$

ustanoví-li se, že bod nárazu $w = 0$ jest počátkem souřadnic x, y. Pro vlákno $\psi = 0$ *na pravo běžící* jest $w = \varphi$. Kraji desky $\zeta = 1$ odpovídá $w_1 = g^2$, bude tedy pro $w < g^2$ z reálné a kladné, což odpovídá rovnici desky. Pro $w > g^2$ máme transformujíce $arc\,sin\,(> 1)$ na *logarithmus*:

$$z = 2g\sqrt{w} - i\sqrt{w\,(w - g^2)} + ig^2 log\left(\sqrt{\frac{w}{g^2}} + \sqrt{\frac{w^2}{g^4} - 1}\right) - ig^2 log\,i \quad (47)$$

Rovnici paprsku $\psi = 0$ lze odtud snadno najíti eliminací veličiny

---

*) Odmocnina má znamení minus, protože dle obr. 15. ku $\varphi = -\infty$ náleží $\zeta = -cos\,\omega - i\,sin\,\omega$.

w čili φ z rovnic

$$x = 2g\sqrt{w} + \frac{\pi}{2} g^2; \quad y = -\sqrt{w(w-g^2)} + g^2 \log\left(\sqrt{\frac{w}{g^2}} + \sqrt{\frac{w^2}{g^4} - 1}\right) \quad (48)$$

§ 52. ***Tlak nekonečně širokého paprsku na desku (pruh) šikmo k proudu položenou.*** Budiž p_0 tlak v klidné tekutině a v paprsku $p = C - (u^2 + v^2)\frac{\varrho}{2}$. Je-li rychlost na povrchu paprsku $\sqrt{u_0^2 + v_0^2} = q$, bude tu skrz kontinuitu tlaků

$$C - \frac{\varrho}{2} q^2 = p_0 \quad \text{a} \quad p - p_0 = \frac{\varrho}{2}(q^2 - \overline{u^2 + v^2}) \quad (49)$$

rovno přetlaku paprsku na desku, náleží-li u, v ku proudokřivce po desce se rozplývající. Při $q = 1$ nalezli jsme $u^2 + v^2 = \frac{1}{(mod\,\zeta)^2}$, tedy bude všeobecněji

$$u^2 + v^2 = \frac{q^2}{(mod\,\zeta)^2} \quad \text{a} \quad p - p_0 = \frac{\varrho}{2} q^2 \left(1 - \frac{1}{(mod\,\zeta)^2}\right) \quad (50)$$

Ceteris paribus bude tudíž výsledný přetlak $p - p_0$ na desku úměrný kvadrátu rychlosti paprskové na povrchu jeho neb i v nekonečnu. Jelikož na bodech desky jest ζ reálné, tedy $mod\,\zeta = \zeta$, bude výsledný přetlak Π_1 jemuž část desky SF v obr. 14. od nárazového bodu až po pravý okraj při příčné dimensi rovné jedničce podléhá, dán vzorcem*):

---

*) Elementem tlačené plochy jest $1 \times$ absolutní délka elementu dx. Pro část desky SF na positivné straně osy x-ové jest $dx = \frac{d\mathfrak{z}}{dw} dw$ a třeba integrovati od $w = 0$ do w_1 příslušného pravému kraji desky F v obrazci (14.). Zavede-li se za proměnnou w proměnná ζ, bude nekonečně malému w odpovídati bod, který v (obr. 14.) leží nekonečně blízko při S ale na pravo, tedy bod S'' či $\zeta = \infty$ v obrazci (15.).

Jde-li o výpočet úhrnného tlaku na levou část desky ES (obr. 14.), bude absolutní délka dx opět rovna vzrostu veličiny $\mathfrak{z}$, to jest $\frac{d\mathfrak{z}}{dw} dw$, ale integrační meze jdou od E ku S, to jest od $w = w_2$ ku $w = 0$, protože $\mathfrak{z}$ v tomto směru roste. Ku $w = 0$ náleží bod blízko při S na levo ležící, tedy $\zeta = -\infty$, ku $w = w_2$ náleží $\zeta = -1$.

$$\Pi_1 \frac{2}{\varrho q^2} = \int_{w=0}^{w=w_1} \frac{dz}{dw} dw \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)$$

$$= \int_{w=0}^{w_1} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) dw = \Big/_{w=0}^{w_1} w\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - \int_{\zeta=\infty}^{1} w\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta \qquad (51)$$

čili se zřetelem k tomu, že ku $w = w_1$ náleží $\zeta = 1$, ku $w = 0$ $\zeta = \infty$ a že $w\zeta$ jest limite $w = 0$ nullou:

$$\Pi_1 \frac{2}{\varrho q^2} = 4g^2 \int_1^\infty d\zeta \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \frac{\zeta^2}{(1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos\omega)^2} \qquad (52)$$

neb se zřetelem na

$$\int_1^\infty \frac{d\zeta\, \zeta^2}{(1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos\omega)^2} = \int_0^1 \frac{d\eta}{(1 + \eta^2 + 2\eta \cos\omega)^2} = \int_0^1 \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos\omega)^2}$$

$$\Pi_1 \cdot \frac{2}{\varrho q^2} = 4g^2 \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos\omega)^2} = \frac{4g^2}{2 \sin\omega^3} \int_0^\omega d\chi (1 - \cos 2\chi)\ ^{*)} \qquad (53)$$

neb $$\Pi_1 \cdot \frac{2}{\varrho q^2} = \frac{2g^2}{\sin\omega^3} (\omega - \sin\omega \cos\omega) \qquad (54)$$

Tlak na druhou část desky jest podobně:

$$\Pi_2 \cdot \frac{2}{\varrho q^2} = \int_{w=w_2}^{0} \frac{dz}{dw} dw \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)$$

$$= \int_{w=w_2}^{0} dw \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = \Big/_{w=w_2}^{w=0} w\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - \int_{\zeta=-1}^{-\infty} w\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta \qquad (55)$$

Ku $w = w_2$ náleží $\zeta = -1$, $w\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)$ jest limite $w = 0$ nullou, tedy

$$\Pi_2 \cdot \frac{2}{\varrho q^2} = 4g^2 \int_{-\infty}^{-1} d\zeta \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \frac{\zeta^2}{(1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos\omega)^2},$$

---

*) po substituci $\zeta = \lambda - \cos\omega$ atd., jako dříve v § 51.

aneb položí-li se místo $\zeta \ldots -\zeta$:

$$\Pi_2 \cdot \frac{2}{\varrho q^2} = 4g^2 \int_1^\infty d\zeta \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \frac{\zeta^2}{(1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \omega)^2} \tag{56}$$

Kladouce tudíž v Π_1 místo $\omega \ldots \pi - \omega$, najdeme Π_2.

Pro celý přetlak paprsku Π obdržíme po substituci

$$f^2 = g^2 = \frac{(\delta_1 + \delta_2) \sin \omega^4}{4 + \pi \sin \omega} \quad [\text{z } (43)]$$

hodnotu:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \varrho q^2 (\delta_1 + \delta_2) \frac{\pi \sin \omega}{4 + \pi \sin \omega} \tag{57}$$

Podobně jako výslednici tlaků, lze též najíti statický moment jejich kolem osy v rovině pruhu obsažené a na x-ové ose kolmé. Pro kolmý dopad ($\omega = 90^0$) máme vzorec *Kirchhoffův*

$$\Pi = \varrho q^2 (\delta_1 + \delta_2) \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

Rozšíření jeho (57) pochází od *lorda Rayleigha.*

Udělíme-li celému systému, tekutině i desce, rychlost q v positivném směru osy y-ové, máme případ, kdy tekutina do nekonečna rozestřená v nekonečnu klidně stojí, kdežto deska a za ní prostor tekutinový mezi sek. paprsky, dříve klidný, se pohybují rychlostí q dle osy y-ové. Tlak určíme pomocí rovnice (20, kap. II.), jen nutno poznamenati, že φ závisí od času, přihlížíme-li vždy k *témuž* bodu prostorovému.

Buďtež $u_0 = \dfrac{\partial \varphi (x, y)}{\partial x}$, $v_0 = \dfrac{\partial \varphi (x, y)}{\partial y}$ rychlosti, které má určitý bod, jehož posice vůči desce jest dána souřadnicemi x, y vztaženými k systému s ní pevně spojenému, když *deska stojí.* Posice jeho vůči systému v prostoru *pevném* $\xi \eta$ jest patrně $\xi = x$, $\eta = y + qt + b$, kdež $qt + b$ jest okamžitá proměnlivá vzdálenost desky od osy ξ. Okamžitá absol. rychlost bodu při pohybu desky jest tudíž:

$$u = u_0 = \frac{\partial \varphi (x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi (\xi, \eta - qt - b)}{\partial \xi},$$

$$v = v_0 + q = \frac{\partial \varphi (\xi, \eta - qt - b)}{\partial \eta} + q,$$

tedy integrací potenciál: $\Phi = \varphi (\xi, \eta - qt - b) + q\eta$.

Výraz
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2\right),$$
ve výraze pro tlak (20, kap. II.) redukuje se skrz
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -q\,\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$
na
$$-q\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + q\right)^2\right) = q^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right].$$
Hydrodynamický tlak jest tedy vůči případu, kdy deska stála, všude menší o $\frac{\varrho}{2}q^2$ (dle 20. kap. II.), a přetlak na desku následkem toho dán opět vzorcem (57).

Na jednotku plochy pruhové připadá tu odpor tlaku (dle 57):
$$\varrho q^2\,\frac{\pi \sin \omega}{4 + \pi \sin \omega} = \varrho q^2\,\frac{\pi}{4+\pi}\cdot\frac{\sin \omega\,(4+\pi)}{4 + \pi \sin \omega}.$$
Faktor $\frac{\sin \omega\,(4+\pi)}{4 + \pi \sin \omega}$ udává, jak odpor proti pohybu desky souvisí se sklonem jejím ku směru pohybu a souhlasí dobře s měřením, které konali *Langley* a hlavně *Manesmann* (Wied. Ann. sv. 67. 1899). Koinciduje-li směr pohybu s normálou desky ($\omega = 90^0$), najde se pro odpor *vzduchu* (za jehož hustotu vůči vodě béřeme 0·00125) při rychlosti desky: 1 *m/sec*, hodnota *0·056 kg* na 1 m^2.

Hodnoty měřené (derivované arciť ne z pohybu nekonečného pruhu, nýbrž kruhů, čtverců atd.) jsou dle *Manesmanna* (l. c. p. 116.) *0·0937 kg/m²* pro *aluminiovou* desku, *0·117* pro desku *papírovou*, tedy větší, a tento rozdíl padá z části na vrub viskosity a tření tekutiny o desky, po níž se vzduch po nárazu rozplývá. Z části nebyla při pokusech *Msn.* bez vlivu okolnost, že se ve vzduchu část *kompresse* ustavičně vyrovnává vlnami vzduchovými, jejichž radiačním centrem jest deska. Vlny tyto repraesentují část energie, která jednou částí práce na pohyb desky vynaložené kryta býti musí. Od plující lodě odcházejí podobným způsobem vlny vodní, pohybem šroubu neb kol vzbuzené, jejichžto energie tvoří nemalou část práce na pohyb lodi vynaložené.

Kapitola VIII.

Dosud jsme jednali o pohybech potenciálových; nyní se míníme zabývati vyšetřením karakteristických vlastností pohybu vířivého. Nalezené theoremy chceme applikovati na případy poměrně jednoduché. Výrok, že v určitém místě A panuje víření, znamená, že tekutina poblíž A má mimo dilatační a postupný též pohyb rotační kol jisté osy místem tím jdoucí, osy okamžitého víření. Naneseme-li na ni neskonale malou délku AB, sestrojíme v B opět osu rotační, naneseme-li na tuto malou délku BC, atd., najdeme křivku, tak zv. *čáru vírovou* (*Wirbellinie*), jejížto tangenty udávají směr okamžitého víření pro částice tekutiny na ní položené. Svazek vírových čar sobě nekonečně blízkých o průřezu velmi malém nazývá se dle *Helmholtze vláknem vírovým* (Wirbelfaden).

§ 53. ***Vírová čára změní během času tvar i posici, jsou to však vždy tytéž materiálné částice, které ji vytvořují.*** Difference souřadnic dx, dy, dz dvou nekonečně blízkých materiálných bodů A, B na téže vírové čáře jsou dle definice úměrny osovým komponentám p', q', r' okamžité vířivé rychlosti Ω, tedy:

$$dx = \frac{p'}{\Omega}\overline{AB},\quad dy = \frac{q'}{\Omega}\overline{AB},\quad dz = \frac{r'}{\Omega}\overline{AB}.$$

Po čase dt přejdou částice AB do posicí A', B', pak dle (§ 12., kap. III.) difference dx v:

$$dx' = dx + dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)$$
$$= \frac{\overline{AB}}{\Omega}\left[p' + dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}p' + \frac{\partial v}{\partial y}q' + \frac{\partial w}{\partial z}r'\right)\right].$$

Pomocí rovnic 14 (kap. II.) máme:

$$dx' = \varrho\,\frac{\overline{AB}}{\Omega}\left[\frac{p'}{\varrho} + dt\,.\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{p'}{\varrho}\right)\right] = \varrho\,\frac{\overline{AB}}{\Omega}\left(\frac{p'}{\varrho}\right)_{t+dt}$$

a podobně $dy' = \varrho\,\dfrac{\overline{AB}}{\Omega}\left(\dfrac{q'}{\varrho}\right)_{t+dt}$, $dz' = \varrho\,\dfrac{\overline{AB}}{\Omega}\left(\dfrac{r'}{\varrho}\right)_{t+dt}$.

Difference dx', dy', dz' jsou úměrny hodnotám veličin $\left(\frac{p'}{\varrho}\right)\ldots$ v čase $t + dt$, bude tedy spojka nových posicí $A'B'$ týchž materiálných bodů v čase $t + dt$ opět udávati směr víření, čímž věta dokázána jest. Umocněním a sečtením najdeme

$$\overline{A'B'} = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = \left(\frac{\varrho \,.\, \overline{AB}}{\Omega}\right)_t . \left(\frac{\Omega}{\varrho}\right)_{t+dt}$$

neb
$$\left(\frac{\overline{AB} \,.\, \varrho}{\Omega}\right)_t = \left(\frac{\overline{A'B'} \,.\, \varrho}{\Omega}\right)_{t+dt}.$$

Element vírového vlákna jest vždy týmiž materiálnými částicemi vytvořen a *hmota jeho stálou.* Je-li Q průřezem jeho,

bude
$$(\overline{AB} \,.\, \varrho \,.\, Q)_t = (\overline{A'B'} \,.\, \varrho Q)_{t+dt}.$$

Odtud jde

$$(Q\Omega)_t = (Q\Omega)_{t+dt} \qquad (0)$$

Součin z průřezu Q vlákna a angulárné rychlosti Ω jest tedy na čase nezávislý a, jak dokážeme, též identický ve všech bodech téhož vírového vlákna.

Dle rovnic (11., kap. II.) jest:

$$2p' = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2q' = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2r' = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (1)$$

tudíž i:
$$\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial r'}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

„Vírová rychlost" jest tedy vektorem podobných vlastností jako „rychlost" u tekutiny nestlačitelné, neboť rovnice (2) odpovídá rovnici kontinuity $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Analogisujeme-li p', q', r' s komponentami jakés rychlosti, bude se zřetelem na určitý prostor „přítok" jim odpovídající roven „odtoku". Do prostoru, jenž omezen jest pláštěm a dvěma průřezy Q, Q' téhož vírového vlákna, vniká při Q kvantum „víŕivého vektoru" $Q\Omega$, a u Q' vyniká jej $Q'\Omega'$. Jest tedy $Q\Omega = Q'\Omega'$, protože na povrchu vlákna „tok" se k němu parallelně děje. Vírové vlákno jest následkem toho buď v sobě uzavřeno, anebo končí v hranicích tekutiny; uprostřed ní končiti nemůže. Končení by bylo jen tehdy možné, kdyby nebylo lze v další konstrukci vírových čar pokračovati,

kdyby tedy vírová rychlost klesla na nullu; pak jest ale součin $Q\Omega$ v tomto, tudíž i všech místech vírového vlákna, nullou, tedy Ω nullou, což jest ve sporu s předpokládanou existencí vlákna.

§ 54. *Formulování a řešení hlavního problému.* Při úvahách o pohybech a deformacích malé oblasti tekutinové (kap. II., § 5.) předpokládali jsme *spojitost* veličin u, v, w tedy *konečnost* differenciálných kvocientů $\frac{\partial u}{\partial x} \dots \frac{\partial w}{\partial z}$, což arciť nevyžaduje, aby tyto samy o sobě byly *spojitými*; mohou tedy existovati části prostoru, kde p', q', r' jsou od nully rozdílnými a jiné s nimi bezprostředně hraničící, v nichž veličiny ty jsou nullou. Osy vírové musí na hranicích takových prostorů padnouti do tangenciálných rovin. Neb kdybychom v opáčném případě nad konturou povrchového elementu hraničného $d\omega$ zřídili malou plochu $d\omega'$ sahající do prostoru $(p' = q' = r' = 0)$, pak by do elementu *prostorového* $d\omega\, d\omega'$ *skrz* $d\omega$ vnikalo víření, aniž by u $d\omega'$ vynikalo. Prostor víry vyplněný musí tedy býti vytvořen ze samých v sobě uzavřených vláken vírových, nesahá-li z jedné aneb více stran až po hranice tekutiny samé (na př. pevné stěny).

Nejvšeobecnější úloha — povahy patrně kinematické — jest pak tato: tekutina jest obsažena v prostoru prostě neb mnohonásobně souvislém, pohyb na hranicích jeho jest předepsán i eventuálné cyklické konstanty jeho, rychlosti u, v, w jsou všude spojité a hodnoty $p'\, q'\, r'$ od místa k místu *dány. Jest najíti současné rozdělení rychlostí u, v, w.* Řešení jest při těchto podmínkách *jednoznačné.* Neboť rozdíl dvou možných řešení: $u_1 - u_2 = \bar{u}$, $v_1 - v_2 = \bar{v}$, $w_1 - w_2 = \bar{w}$ má tu vlastnost, že příslušné mu výrazy:

$$\bar{p}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right),\ \bar{q}',\ \bar{r}'$$

jsou vesměs nullou. Jest to tedy pohyb nutně potenciálový s cyklickými konstantami rovněž nulle rovnými a s pohybem nullovým na hranicích. Značkou jeho jest *stálý* potenciál rychlosti, tudíž klid.

Řešení úlohy právě naznačené dá se, jak ukážeme, snadno provésti, sahá-li tekutina na všechny strany do nekonečna, kdež v klidu jest, není-li v ní žádných těles hranice tvořících a předpokládá-li se, že u, v, w jsou spojitými úkony posice. Předešleme však tuto úvahu.

Je-li v prostoru tekutinou vyplněném dáno více dílčích prostorů A, B... s vírovými rychlostmi od nully rozdílnými, zjednodušíme úlohu tím, že hledáme u, v, w pro případ, kdy víření existuje buď jen v A, neb jen v B atd. Součet těchto parciálných řešení jest řešením úplným; lze však i jednotlivá parciálná řešení dekomponovati, když každý dílčí prostor rozdělíme na jednotlivá vírová vlákna o neskonale malých průřezích a když vyšetříme o sobě, jaká jsou u, v, w srovnávající se s existencí *jediného* v sobě uzavřeného vlákna vírového. Prostor takové vlákno obklopující jest víření prost, tudíž jsou u, v, w vyjádřitelny potenciálem rychlosti a sice mnohoznačným, protože řečený prostor jest dvojnásobně souvislým. Konstanta cyklického pohybu, to jest integrál $\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ kontrahovaný až na konturu průřezu vláknového rovná se dle *Stokesovy* věty (rovn. 2., kap. III.) integrálu $-2\int d\omega\,(\cos nx\,.\,p' + \cos ny\,.\,q' + \cos nz\,.\,r')$ vztaženému na plochu průřezu vláknového, tedy až na znamení dvojnásobnému součinu $Q\Omega$. Následkem toho bude jedna a sice čistě cyklická část veličin u, v, w po prostoru tak rozdělena, jako jsou rozděleny magnetické síly pocházející od stálého proudu, jenž s intensitou ku $Q\Omega$ úměrnou vláknem cirkuluje, kdežto druhá možným spůsobem od pohybu a deformací vlákna pocházející část se dá vyjádřiti jednoznačným potenciálem rychlosti. Lze tudíž se zřetelem na známé zákony elektromagnetismu netoliko v přítomnosti jednoho vírového vlákna nýbrž vůbec za řešení úlohy považovati rovnice:

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (3)$$

Veličiny U, V, W v (3), tak zv. vektorové potenciály elektrodynamiky, jsou úkony souřadnic x, y, z onoho bodu, pro nějž u, v, w hledáme.

Na místo odvolati se k zákonům magnetického účinku proudů, vyšetříme raději význam veličin U, V, W přímo, zavedeme však k vůli pohodlí místo p', q', r' značky ξ, η, ζ, tak že jest:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

Dosadíce sem u, v, w z rovnic (3) máme:

$$\left.\begin{aligned} &2\xi = -\Delta U + \frac{\partial J}{\partial x},\quad 2\eta = -\Delta V + \frac{\partial J}{\partial y},\quad 2\zeta = -\Delta W + \frac{\partial J}{\partial z},\\ &\text{kdež}\quad J = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\quad \text{a}\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Kdyby J bylo nullou, mohli bychom rovnice (5) integrovati; neboť U, V, W by byly potenciály hmoty, která po prostoru rozestřena jest s hustotou $\frac{\xi}{2\pi}, \frac{\eta}{2\pi}, \frac{\zeta}{2\pi}$, bylo by tedy:

$$U = \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\tau\,\xi}{r},\quad V = \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\tau\,\eta}{r},\quad W = \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\tau\,\zeta}{r} \quad (6)$$

V rovnicích (6) značí $d\tau = dx'\,dy'\,dz'$ objemový element prostoru víry vyplněného v posici x', y', z', r vzdálenost jeho od bodu plynulého x, y, z, pro nějž u, v, w hledáme, tedy

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Veličiny ξ, η, ζ musíme si pak mysliti jakožto úkony souřadnic x', y', z. Dokážeme, že za dříve (pag. 185.) uvedených podmínek supposice $J = 0$ s rovnicemi (6) ve sporu není, tak že rovn. (6) za integrály rovnic (5) považovati lze.

Se zřetelem na vztah $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r'}\right)$ bude totiž:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau\,\xi\,.\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right),\ \text{atd.}$$

tedy:
$$J = -\int d\tau\left[\xi\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \quad (7)$$

Při transformaci výrazu J dle *Greenovy* methody (§ 4. kap. III.) přijdeme jednak k objemovému integrálu:

$$\int\frac{d\tau}{r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x'} + \frac{\partial\eta}{\partial y'} + \frac{\partial\zeta}{\partial z'}\right),$$

který jest nullou dle (2), pak k povrchovým integrálům:

$$\int\frac{d\omega}{r}\,(\xi\cos nx + \eta\cos ny + \zeta\cos nz).$$

K těmto hledíc jest předně uvážiti, že $1/r$ jest nekonečně velikým v bodě x, y, z, padne-li bod x, y, z do prostoru víry

vyplněného, tak že bude třeba vyloučiti jej koulí o nekonečně malém radiu r' z prostoru integračního a povrch koule čítati k hranicím integračního prostoru. Integrál na tuto plochu vztažený jest však o řádu $\frac{4r'^2\pi}{r'}$, tedy v limitě také nullou.

Mimo to připouštíme možnost rozpojitých změn veličin ξ, η, ζ v jistých plochách buď tím, že α) prostor bezvírový hraničí s prostorem víry vyplněným, aneb β) že směr vírových vláken v jistých plochách náhle se změní. Na každý spůsob vyloučíme plochy ty dvěma nekonečně blízkými parallelními plochami z integračního prostoru, považujíce je za nové hranice jeho, k nimž integrace plošná *také* vztažena býti musí (§ 14).

V případě (α) jest na jedné ze zmíněných parallelních ploch $\xi = \eta = \zeta = 0$, na druhé $\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz = 0$, protože osa víření padá do tangenciálné roviny pomezné plochy.

V případě (β) vyvolme si určité vlákno, které se v ploše diskontinuity zlomilo a z obou sousedních ploch vyťalo elementy $d\omega$, potažmo $d\omega'$. Jelikož normála n má v nich protivný směr, bude se v plošných integrálech dle věty o konstanci produktu $Q\Omega$ součet vždy dvou příspěvků $d\omega(\xi \cos nx + \ldots)$ a $d\omega'(\xi' \cos nx \ldots)$ navzájem rušiti. Na každý spůsob vypadnou z počtu integrály vzaté přes plochy, kde se ξ, η, ζ rozpojitě mění. Jsou-li víry jen v konečnu obsaženy, vypadne také integrál přes nekonečně vzdálenou plochu a J derivované ze vzorců (6) jest v souhlase s hypothesou skutečně nulle rovno.

Výrazy jako:

$$u_1 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w_1 = \frac{\partial V}{dx} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

dávají pak jednu část úplného řešení; vyhovují rovnici kontinuity

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

a mají tu vlastnost, že u_1, v_1, w_1 jest všude spojitým, protože všechny differenciálné kvocienty *potenciálů* U, V, W jsou spojitými; v nekonečnu jest $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $w_1 = 0$, protože zde diff. kvocienty k nulle konvergují. Řešení dává pro $\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}$ hodnotu $-\Delta U + \frac{\partial}{\partial x} J$ neb $-\Delta \frac{1}{2\pi} \int d\tau \, \frac{\xi}{r}$, což jest skutečně

$$-4\pi\left(-\frac{\xi}{2\pi}\right) = 2\xi.$$

Úplným řešením úlohy jest dle (3)

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + u_1, \quad v = \frac{\partial \Pi}{\partial y} + v_1, \quad w = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + w_1.$$

K určení veličiny Π máme jen podmínku $\Delta \Pi = 0$, plynoucí z rovnice kontinuity. Ustanovíme-li však, že u, v, w má býti všude spojitým a v nekonečnu býti nullou, musí Π býti veličinou stálou (viz § 16., kap. III.), a následkem toho bude:

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (7^a)$$

při hodnotách U, V, W ustanovených rovnicemi (6) a za podmínek dříve uvedených úplným řešením úlohy. Existují-li rozpojitosti, na př. pro u, v, w na povrchu prostorů vírových, pak arciť jest Π od nully rozdílným.

Nalezené řešení dá se názorně interpretovati, jestliže přihlížíme k účinku *jednoho* velmi tenkého v sobě uzavřeného vlákna vírového. Je-li $i = Q\Omega$ jeho vírovou intensitou, jsou-li $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ směrové cosiny tečné (zároveň osy víření), ds elementem délkovým, bude $d\tau = Q\,ds$,

$$U = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\tau \xi}{r} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{Q\,ds.\left(\Omega \frac{dx}{ds}\right)}{r} = \frac{i}{2\pi}\int \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{r} \,.\, ds,$$

$$V = \frac{i}{2\pi}\int \frac{dy}{ds} \,.\, ds \,.\, \frac{1}{r}, \quad W = \frac{i}{2\pi}\int \frac{dz}{ds}\, ds \,.\, \frac{1}{r},$$

a to jsou právě až na faktor Ampèrovy potenciály vektorové. Jde-li na př. o účinek elementu vlákna ds na libovolný bod, položme bodem osu x-ovou, elementem a bodem rovinu xz s počátkem souřadnic v elementu ds, tak aby vír jím jdoucí svíral s osou x-ovou úhel ϑ; pak jest

$$\frac{dx}{ds} = \cos\vartheta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\vartheta, \quad \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$U = \frac{i}{2\pi}\cos\vartheta\, ds \,.\, \frac{1}{r}; \quad W = \frac{i}{2\pi}\sin\vartheta\, ds \,.\, \frac{1}{r}; \quad V = 0; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dále jest

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3};$$

pro *bod* na x-ové položený: $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ bude:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

tedy

$$u = 0, \quad w = 0, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{i}{2\pi}\frac{\sin\vartheta\, ds}{r^2} \tag{8}$$

Rovnice (8) jest až na faktor identická se známým zákonem o účinku proudového elementu na magnetický pól jednotkový. Síle stojící kolmo na rovině položené elementem ds a pólem odpovídá rychlost v, kterou vírový element ds udílí tekuté částici v posici pólu.

Na větách právě odvozených spočívá možnost vyšetřiti pohyb prostorů víry vyplněných, speciálně tedy pohyb prstenů vírových. To, co z okamžité konfigurace jejich dle předchozího bezprostředně vyšetřiti lze, jest okamžitá rychlost každé částice u, v, w, tudíž i změna posice její za čas dt, tedy konfigurace vírů v okamžiku následujícím atd.

Obtíže, patrně již jen povahy mathematicko-formálné, povedlo se dosud přemoci jen v případech poměrně jednoduchých, na př. u vírových vláken buď kruhových neb rovných a z nekonečna do nekonečna sahajících. Nemalé výhody poskytují tu analogie elektromagnetické. Dlužno zvláště uvážiti případ následující. Sahají-li vírové prostory až do nekonečna, co jsme dříve nepředpokládali, položíme kolem počátku souřadnic kouli o nekonečně velikém radiu R, *a ustanovíme, že se integrace* (6) a (7) ***vztahují na vírové prostory uvnitř této koule položené.*** Že veličinám U, V, W takto definovaným přísluší opět $J = 0$, dokážeme takto: Vírové vlákno, není-li v sobě uzavřeno, musí nutně sahati od nekonečna do nekonečna. Vytne-li z nekonečné koule plochy $d\omega$ a $d\omega'$, budou se v příslušném integrálu plošném

$$\int \frac{d\omega}{R}(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)$$

rušiti vždy dva a dva členy $d\omega(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz)$ dle věty o stálosti součinu $Q\Omega$ na rozličných místech téhož vírového vlákna. Následkem toho zůstanou relace $J = 0$ a všechny s ní souvisící důsledky i zde v platnosti.

§ 55. *Kinetická energie tekutiny.* Výrazem jejím jest dle (7ᵃ):

$$\text{I.}\qquad \frac{2T}{\varrho}=\int d\tau\,(u^2+v^2+w^2)$$

$$=\int d\tau\left[u\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right].$$

Transformace *Greenovou* methodou dává:

$$\frac{2T}{\varrho}=\int d\omega\,[\cos nx\,(vW-wV)+\cos ny\,(wU-uW)+\cos nz\,(uV-vU)]$$

$$-\int d\tau\left[U\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+V\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+W\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \qquad (8^a)$$

Povrchový integrál, jenž se při předpokládané kontinuitě výrazů u, v, w U, V, W jen k nekonečně vzdálené ploše vztahovati může, redukuje se na nullu, protože U, V, W jsou zde aspoň o řádu $\frac{1}{R}$, pak u, v, w dle (8) o řádu $\frac{1}{R^2}$, kdežto $d\omega$ jest o řádu $d\varepsilon\,.\,R^2$, ($d\varepsilon$ = element tělesného úhlu). Pomocí (4) máme tedy

$$\frac{T}{\varrho}=\int d\tau\,(U\xi+V\eta+W\zeta), \qquad (9)$$

neb použijeme-li rovnic (6) psaných ve formě:

$$U_{(x,\,y,\,z)}=\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\tau'\,\xi'}{r}\ \text{atd.}$$

$$T=\frac{\varrho}{2\pi}\iint\frac{d\tau\,d\tau'}{r}\,(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta') \qquad (10)$$

I tento vzorec má své analogon ve výrazu pro magnetickou energii proudového systému.

Jak známo, vzbuzuje proudový element $i\,ds$ sílu, jejíž měrné číslo v absolutní míře elektromagnetické jest $\frac{i\sin\vartheta\,ds}{r^2}$; magnetická energie v jednotce objemu jest $\frac{1}{8\pi}\left(\frac{i\sin\vartheta\,ds}{r^2}\right)^2$. Vírové intensitě o *témže* měrném čislu i odpovídá dle (8) kinetická energie jednotky objemové: $\frac{\varrho}{2}\left(\frac{i\sin\vartheta\,ds}{2\pi r^2}\right)^2$. Z měrného čísla *magn. energie* obdržíme tudíž *kinet. energii* násobíce faktorem $\frac{\varrho}{\pi}$.

Magnetická energie systému proudového, kde v tenkých vodičích cirkulují proudy $i_1, i_2, i_3 \ldots$, dá se též vyjádřiti tvarem:

$$L_{11}\frac{i_1^2}{2}+L_{12}i_1i_2+L_{22}\frac{i_2^2}{2}+\frac{L_{33}i_3^2}{2}+L_{13}i_1i_3 \text{ atd.}$$

L_{11}, L_{22} jsou tak zv. koefficienty samoindukce, L_{12}, $L_{13}\ldots$ koefficienty vzájemné indukce. Jsou to vesměs veličiny o dimensi *délkové*, vypočtené z tvaru a posic lineárných proudovodičů. Dle předchozího bude kinetická energie tekutiny, v níž proudy vírovými vlákny o intensitách $i_1 i_2 \ldots$ nahrazeny jsou:

$$(\tfrac{1}{2}L_{11}i_1^2+L_{12}i_1i_2+\ldots)\frac{\varrho}{\pi}.$$

II. K jinému svými konsekvencemi pozoruhodnému vzorci pro T přijdeme transformujíce *Greenovou* methodou vzorec:

$$\frac{2T}{\varrho}=\iiint dx\,dy\,dz\left(u^2\frac{\partial x}{\partial x}+v^2\frac{\partial y}{\partial y}+w^2\frac{\partial z}{\partial z}\right) \qquad (11)$$

Patrně jest prvý integrál v (11):

$$J_1=\iiint dx\,dy\,dz\,u^2\frac{\partial x}{\partial x}=-A_1-2\int d\tau\,ux\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (12)$$

kdež $A_1=\int d\omega\,u^2 x\cos nx$. Do objemového integrálu (12) dosaďme $\frac{\partial u}{\partial x}=-\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ a integrujme opět dle methody *Greenovy*; tím bude:

$$J_1=-A_1+2\int d\tau\left(xu\frac{\partial v}{\partial y}+xu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$=-A_1-2A_2-2\int d\tau\left(vx\frac{\partial u}{\partial y}+wx\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

kdež $A_2=\int d\omega\,xu(v\cos ny+w\cos nz)=\int d\omega\,xu(\sigma-u\cos nx)$,

a $\qquad \sigma=u\cos nx+v\cos ny+w\cos nz.$

Dle (4) bude:

$$J_1=-A_1-2A_2-2\int d\tau\,x\left[v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-2\zeta\right)+w\left(2\eta+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$J_1=-A_1-2A_2+4\int d\tau\,x(v\zeta-w\eta)$$

$$-2\int d\tau\,x\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+2\int d\tau\,xu\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Druhý integrál na pravo transformuje se na:

$$-\frac{1}{2}\int d\omega\,(u^2+v^2+w^2)\,x\cos nx-\frac{1}{2}\int d\tau\,(u^2+v^2+w^2).$$

Se zřetelem na (12) máme pak:

$$2J_1=-2(A_1+A_2)+4\int d\tau\,x(v\zeta-w\eta)+\int d\omega\,x\cos nx\,(u^2+v^2+w^2)+\frac{2T}{\varrho}$$

$$\text{neb } J_1=\frac{1}{2}\int d\omega\left[\cos nx\,x\,(V^2)-2x\,u\sigma\right]+2\int d\tau\,x\,(v\zeta-w\eta)+\frac{T}{\varrho},$$

kdež $V^2=u^2+v^2+w^2$. Podobné výrazy nalezneme pro J_2 a J_3, druhý a třetí to integrál v (11) a sice cyklickou záměnou veličin x, y, z, u, v, w, ξ, η, ζ. Sečtením jejich a se zřetelem na (11) máme:

$$\frac{T}{\varrho}=2\int d\tau\left[x\,(w\eta-v\zeta)+y\,(u\zeta-\xi w)+z\,(v\xi-\eta u\right]+H,\quad (12^a)$$

kdež

$$H=\int d\omega\Big\{(xu+yv+zw)\,(u\cos nx+v\cos ny+w\cos nz)$$

$$-\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\,(x\cos nx+y\cos ny+z\cos nz)\Big\}\quad (12^b)$$

Integraci dlužno v našem případě, kdy při spojitosti veličin u, v, w tekutina až do nekonečna sahá, vztahnouti na kouli o nekonečném radiu R.

Dle (8) jest tu účinek u, v, w od vírů v *konečnu* položených veličinou o řádu $\frac{1}{R^2}$, x jest o řádu R, $d\omega$ o řádu $d\varepsilon\,.\,R^2$, tedy H v limitě o řádu $\frac{1}{R}$ a následkem toho:

$$T=2\varrho\int d\tau\left[x\,(w\eta-v\zeta)+y\,(u\xi-w\xi)+z\,(v\xi-\eta u)\right]\quad (13)$$

Výraz T v (13) závisí zdánlivě od polohy souřadnicového systému skrz vyskytující se v něm x, y, z, ale v skutečnosti na něm záviseti nemůže. Odtud plyne řada zajímavých důsledků illustrujících těsnou *formálnou* souvislost zjevů vírových se zjevy pole elektromagnetického.

Posuneme-li předně systém směrem x-ové osy zpět o $\delta\alpha$, zvětší se každé x o $\delta\alpha$; y, z, u, v, w, ξ, η, ζ se nezmění. Odtud

jde se zřetelem na (13):

$$\int d\tau\,(w\eta - v\zeta) = 0 \tag{14}$$

a podobně $\int d\tau\,(u\zeta - w\xi) = 0$, $\int d\tau\,(v\xi - u\eta) = 0$.

Otočíme-li souřadnicový systém kol osy z proti směru rafije hodinové o velmi malý úhel σ, nezmění se z, za to přejde x v $x - y\sigma$, a y v $y + x\sigma$, a jelikož se T změniti nemůže, bude:

$$\int d\tau\,[x\,(u\zeta - w\xi) - y\,(w\eta - v\zeta)] = 0 \tag{15}$$

s podobnými dvěma rovnicemi, které vzniknou cyklickou přestavou. Rovnice (14, 15) repraesentují jisté všeobecné vlastnosti vířivého pohybu, k nimž se ještě vrátíme; prozatím upozorníme na význam jejich elektrodynamický, předesílajíce k vůli informaci následující. Proudový element ds o intensitě i účinkuje na magnetický pól o síle μ ve vzdálenosti r dle (8) silou $const.\,\frac{\mu}{r^2}\,i\,ds\,.\,sin\,\vartheta$, která kolmo stojí na rovině položené elementem ds a pólem μ. Nelze sice ani element proudový ani pól v skutečnosti isolovati a se o správnosti uvedeného vzorce přímo přesvědčiti, avšak kdykoli pomocí jeho vypočítáme magnetický účinek proudů uzavřených, vždy přicházíme k výsledkům se zkušeností se naprosto shodujícím.*) Připustíme-li mezi $i\,ds$ a μ platnost principu akce a reakce, a uvážíme-li, že $\frac{\mu}{r^2}$ jest magnetická síla, již pól μ vzbuzuje na místě, kde se proudový element nalézá, můžeme říci, že ponderomotorický účinek, jemuž *proudový element* $i\,ds$ podléhá, jest úměrným délce elementu, intensitě proudu a intensitě panujícího tu pole magnetického, jakož i sinu úhlu mezi směrem proudu a směrem pole. Síla ponderomotorická (elektrodynamická) stojí pak kolmo na rovině položené skrz ds a směr pole. Označíme-li tři složky magnetické síly písmeny u, v, w, *ponderomotorickou* sílu účin-

---

*) Novější elektrodynamika *Maxwellova* zná jen proudy uzavřené, byť i dielektrikem.

kující na $i\,ds$ a rozloženou dle os písmeny X, Y, Z, bude:

$$\left.\begin{aligned} X &= i\,const\,.\,ds\left(w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds}\right)\\ Y &= i\,const\,.\,ds\left(u\frac{dz}{ds} - w\frac{dx}{ds}\right)\\ Z &= i\,const\,.\,ds\left(v\frac{dx}{ds} - u\frac{dy}{ds}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

O správnosti rovnic (16) přesvědčíme se snadno. Násobíme-li je po sobě na dx/ds, dy/ds, dz/ds a sečteme, vyjde nulla, a podobně když je násobíme na u, v, w. Výsledná síla složená z XYZ v (16) stojí tedy kolmo na směru ds i na směru magn. síly. *Velikost* její najdeme, umocníce, sečtouce a odmocníce. Snadná úvaha vede tu k nahoře vytčenému zákonu elektrodynamickému, jenž ve svých konsekvencích experimentem stvrzen jest. Pocházejí-li magnetické síly jen od proudovodičů, musí dle principu akce i reakce součty ΣX, ΣY, ΣZ vztažené na *všechny* elementy všech proudů býti nulle rovny, podobně součty všech statických momentů $\Sigma(Yz - Zx) = 0$.

V hydrodynamické analogii odpovídá intensitě proudu součin $Q\Omega$, tak že obdržíme, píšíce $Q\,ds = d\tau$ za objemový element vlákna vírového:

$$X = const\;\Omega\;d\tau\left(w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds}\right) = d\tau\;const\;(w\eta - v\zeta)$$

a
$$\Sigma X = const\;\Sigma\;d\tau\;(w\eta - v\zeta) = 0.$$

Hydrodynamické rovnice (14) a (15) přenesené do elektrodynamiky vyjadřují tudíž jisté konsekvence principu akce a reakce.

Obvyklý postup výkladu o vírech přerušíme nyní odvozením pozoruhodných rovnic *Clebschových*, které poukazují k novému dosud nezpracovanému vstupu do nauky o vírech.

§ 56. ***Rovnice Clebschovy.*** Je-li tekutina *omezena*, na př. povrchy těles v ní se pohybujících s *předepsanými* rychlostmi normálovými, jest řešením úlohy soustava rovnic (3) a (6). Veličinu Π lze totiž tak určiti, aby se srovnávalo příslušné $\dfrac{\partial \Pi}{\partial n}$

s předepsanými na povrchu těles hodnotami

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz.$$

Další úloha, pomocí rovnic (3) a (6) a všeobecných rovnic hydrodynamických najíti analytický výraz pro tlak p, to jest vyjádřiti jej úkony U, V, W Π se dosud nepovedla. Docílíme toho pomocí veličin arciť naprosto rozdílných, tak zvanými *Clebschovými* integrály rovnic hydrodynamických, k nimž se nyní obracíme, předesílajíce tuto krátkou úvahu.

Potenciálové pohyby dají se vesměs vyjádřiti *jedinou* funkcí, potenciálem rychlosti φ, a sice tehdy, je-li $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ úplným differenciálem nějakého úkonu φ. Co do mathematické jednoduchosti jest nejblíže onen případ, kdy $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ se dá uvésti na tvar $G.dH$, kdež dH jest úplným differenciálem nějakého úkonu souřadnic a času a G funkcí podobnou. Patrně jest tu $1/G$ integrujícím faktorem trinomu $udx + vdy + wdz$, z čehož jde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{G}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{G}\right) = 2\zeta\frac{1}{G} + v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\right) - u\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\right) &= 0 \\ 2\xi\frac{1}{G} + w\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\right) - v\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{G}\right) &= 0 \\ 2\eta\frac{1}{G} + u\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{G}\right) - w\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Násobením těchto rovnic na w, u, v a sečtením najdeme:

$$\xi u + \eta v + \zeta w = 0 \qquad (18)$$

jakožto podmínku pro existenci integračního faktoru, která vypovídá, že proudové a vírové čáry mají na sobě vždy kolmými býti. Je-li vice versa tato podmínka splněna, existuje vždy integrační faktor; v případě opáčném nemohly by totiž pravé strany rovnic (17) býti nullou a nebylo by tedy všeobecně nullou $\xi u + \eta v + \zeta w$, což se příčí předpokladu.

Při podmínce (18) dají se u, v, w vyjádřiti *dvěma* úkony H a G a sice formou:

$$u = G.\frac{\partial H}{\partial x},\quad v = G.\frac{\partial H}{\partial y},\quad w = G.\frac{\partial H}{\partial z} \qquad (19)$$

Není-li podmínka (18) předem splněna, dají se rozmanitým způsobem najíti tři *jiné* úkony u', v', w', které vyhovují rovnici

$$u'\xi + v'\eta + w'\zeta = 0. \qquad (20)$$

Píšeme-li, restringujíce tím zároveň neurčitost úkonů u', v', w':

$$u' = u - \frac{\partial R}{\partial x},\quad v' = v - \frac{\partial R}{\partial y},\quad w' = w - \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{21}$$

můžeme R vždy tak zvoliti, aby rovnice (20) splněna byla. Neboť jde tu vlastně o vždy možnou integraci parciálné rovnice differenciálné:

$$u\xi + v\eta + w\zeta = \xi \frac{\partial R}{\partial x} + \eta \frac{\partial R}{\partial y} + \zeta \frac{\partial R}{\partial z} \tag{22}$$

Zavedeme-li označení: $\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 2\zeta'$ atd., nalézáme z rovnic (21) vztahy: $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, $\zeta' = \zeta$, a po dosazení do (20) relaci:

$$u'\xi' + v'\eta' + w'\zeta' = 0. \tag{23}$$

Existence úkonu R srovnávajícího se s (20) a (21) vede tedy nutně k rovnici (23), která vyjadřuje, že $u'dx + v'dy + w'dz$ *má* integrujícího faktora, takže jistotně jest $u' = G \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$, $v' = G \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$, $w' = G \cdot \frac{\partial H}{\partial z}$. Při naprosto libovolném rozdělení rychlostí u, v, w, lze tedy najíti tři úkony R, G, H té vlastnosti, že (dle 21) jest

$$u = \frac{\partial R}{\partial x} + G \cdot \frac{\partial H}{\partial x};\ v = \frac{\partial R}{\partial y} + G \cdot \frac{\partial H}{\partial y};\ w = \frac{\partial R}{\partial z} + G \cdot \frac{\partial H}{\partial z} \tag{24}$$

Týmiž veličinami G, H lze vyjádřiti vírové rychlosti. Zavedeme-li $H_1 = \frac{\partial H}{\partial x}$, $H_2 = \frac{\partial H}{\partial y} \ldots$, $G_3 = \frac{\partial G}{\partial z}$, bude:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = G_2 H_3 - G_3 H_2,$$

$$2\eta = G_3 H_1 - G_1 H_3,\quad 2\zeta = G_1 H_2 - G_2 H_1 \tag{25}$$

Položíme-li *formu* G rovnu konstantě c_2, obdržíme rovnici plochy, a systém ploch, necháme-li c_2 se nepřetržitě měniti. Podobně bude $H = c_1$ označovati jiný systém ploch a ($H = c_1$, $G = c_2$) systém prostorových čar (c_1, c_2), jichž parametry jsou konstanty c_1 a c_2.

Směrové cosiny normál ku ploše $H = c_1$, potažmo $G = c_2$ v bodě křivky $(c_1 c_2)$ jsou úměrny hodnotám H_1, H_2, H_3, potažmo G_1, G_2, G_3. Směrové cosiny tangenty průsekové křivky budou tudíž úměrny ku: $(G_2 H_3 - G_3 H_2)$, $(G_3 H_1 - G_1 H_3)$ atd., tedy dle rovnic (25) i ku ξ, η, ζ. Křivky (c_1, c_2) jsou následkem toho identické s čarami vírovými, a rovnicí *jedné* z nich jest:

$$H(x, y, z, t) = c_1, \quad G(x, y, z, t) = c_2.$$

V čase $t + dt$ jest rovnice *téže* vírové čáry $(c_1 c_2)$

$$H(x, y, z, t + dt) = c_1, \quad G(x, y, z, t + dt) = c_2.$$

Materiálný bod x, y, z, jenž na ní ležel v čase t, leží na ní i v čase $t + dt$, když se jeho souřadnice byly změnily na $x + udt$, $y + vdt$, $z + wdt$, bude tedy v platnosti:

$$H(x + udt, y + vdt, z + wdt, t + dt) = 0, \text{ neb}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} + w\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \\ \text{a podobně } &\frac{\partial G}{\partial t} + u\frac{\partial G}{\partial x} + v\frac{\partial G}{\partial y} + w\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Transformujme nyní výraz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + G\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Patrně jest

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial x} + G \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial t},$$

neb

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial t} + G\frac{\partial H}{\partial t}\right) + S,$$

kdež veličina:

$$S = \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial t}$$

přejde pomocí (26), pak (25) v

$$S = v(G_1 H_2 - G_2 H_1) - w(G_3 H_1 - G_1 H_3) = 2(v\zeta - w\eta).$$

Odtud plyne:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\eta - v\zeta) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial t} + G\frac{\partial H}{\partial t}\right).$$

Dosadíme-li tento a podobné dva výrazy do rovnic (12, II) píšíce $p' = \xi$, $q' = \eta$, $r' = \zeta$, najdeme

$$\frac{\partial N}{\partial x} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}; \tag{27}$$

kdež
$$N = \frac{\partial R}{\partial t} + G \,.\, \frac{\partial H}{\partial t} + {}^1/_2\,(V^2); \quad V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \tag{28}$$

Je-li $X = -\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $Y = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $Z = -\dfrac{\partial P}{\partial z}$ a p úkonem jen hustoty, tedy $\dfrac{1}{\varrho} = F'(p)$, nabudeme integrací rovnic (27) vztah:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + G \,.\, \frac{\partial H}{\partial t} + {}^1/_2\,(V^2) + F(p) + P = f(t), \tag{29}$$

kdež $f(t)$ jest libovolným úkonem času.

Rovnice právě nalezená jest zvšeobecněním rovnice (19, kap. III), a dovoluje vypočísti tlak p, známe-li úkony R, G, H.

Postup, jakým by se *Clebschovy* rovnice na problémy applikovati měly, byl by tento: Je-li rozdělení vírových rychlostí dáno, běží napřed o integrace parciálných diff. rovnic (25). Nalezeno-li odtud G a H určí se pomocí (24) R z rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(neb též z rovnice 22 přímo).

I v poměrně jednoduchých případech poskytuje provedení naznačeného postupu značné obtíže, takže dosud *Clebschovy* rovnice mají význam jen theoretický. V následujícím obracíme se k applikacím všeobecných vět o vírech.

§ 57. ***Vírová vlákna kruhová.*** Víry mějtež tvar kruhů s rovinami vespolek rovnoběžnými a se středy položenými na ose z. Tato osová symmetrie bude patrně trvalou, neúčinkují-li na tekutinu síly zevnější, leží-li hranice její až v nekonečnu a panuje-li zde klid; porušení symmetrie *stěnami* jest tedy vyloučeno. Je-li Ω vírovou rychlostí v jistém bodě $x = r\cos\sigma$, $y = r\sin\sigma$, z, kdež $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost od osy z a σ úhel (rx) označuje, bude $\xi = -\Omega\sin\sigma$, $\eta = \Omega\cos\sigma$, $\zeta = 0$. Magnetická síla vycházející z kruhového proudu jest táž jako síla od *Ampèrovy* dvojvrstvy

a jest obsažena v rovině jdoucí osou kruhu. Z toho důvodu bude rychlost bodu x, y, z částečně radiálná (V_r), částečně rovnoběžná k ose z, tedy: $u = V_r \cos\sigma$, $v = V_r \sin\sigma$. Pět z rovnic (14, 15) jest identicky splněno; rovnice šestá $\int d\tau\,(v\xi - u\eta) = 0$ vede ku všeobecné větě, které později upotřebíme. Provedení integrace přes objem *jednoho* vírového vlákna o průřezu $d\omega$ a radiu r vede se zřetelem na $d\tau = d\omega\,.\,r\,d\sigma$ ku

$$-\Omega\,.\,V_r\,d\omega\,.\,r\int_0^{2\pi} d\sigma \quad \text{neb} \quad -2\pi r\,V_r\,\Omega\,d\omega;$$

$\Omega\,d\omega = di$ jest na čase nezávislá *síla vlákna*, jeho V_r tolik co $\frac{dr}{dt}$.

Utvoříme-li tudíž součet přese všechna vlákna, bude $\Sigma di\,.\,r\,\frac{dr}{dt} = 0$,

tedy $$\Sigma(di\,.\,r^2) = const. \qquad (29^a)$$

Radius r_0 definovaný relací $r_0^2 = \frac{\Sigma(di\,.\,r^2)}{\Sigma(di)}$ bude rovněž stálým. Je-li u všech vláken Ω (tedy i di) téhož znamení, bude r_0 obsaženo mezi maximálným a minimálným radiem vláken jednotlivých. (Neboť $r_0^2 < \frac{\Sigma di\,.\,r^2_{max}}{\Sigma(di)}$ tedy $r_0^2 < r^2_{max}\,.\,\frac{\Sigma(di)}{\Sigma(di)}$ atd.) Souřadnice $z_0 = \frac{\Sigma(di\,.\,r^2\,.\,z)}{\Sigma(di\,.\,r^2)}$ podobně definovaná bude za uvedené podmínky opět jakousi střední hodnotou distancí z příslušných vláknům jednotlivým. Derivací dle času najdeme:

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{2\Sigma\left(di\,.\,r\,.\,\frac{dr}{dt}\,.\,z\right)}{\Sigma(di\,.\,r^2)} + \frac{\Sigma\left(di\,.\,r^2\,.\,\frac{dz}{dt}\right)}{\Sigma(di\,.\,r^2)} \qquad (30)$$

Z rovnice (13), v níž zavedeme $d\tau = 2\pi r\,d\omega$, $w = \frac{dz}{dt}$, plyne

$$\frac{T}{2\varrho} = \int d\tau\,\Omega\left[wr - zV_r\right] = 2\pi\,\Sigma di\,.\,r\left[\frac{dz}{dt}r - z\frac{dr}{dt}\right] \qquad (31)$$

Z (30) a (31) jde:

$$\frac{dz_0}{dt}\,\Sigma(di\,.\,r^2) = 3\Sigma\left(di\,.\,r\,\frac{dr}{dt}z\right) + \frac{T}{4\pi\varrho} \qquad (32)$$

Této rovnice později upotřebíme.

Z vektorových potenciálů, k jejichžto výpočtu se obracíme, jest W skrz $\zeta=0$ nullou. Výpočtu ostatních vektorů U, V musí předcházeti vyšetření parciálných vektorových hodnot U_1, V_1, pocházejících od určitého vírového vlákna o nekonečně malém průřezu $d\omega'$, jemuž náleží vírová rychlost Ω', souřadnice z' a r'. Bod na tomto vlákně má souřadnice $x'=r' \cos\sigma'$, $y=r' \sin\sigma'$, z' a jeho odlehlost Δ od bodu $x=r\cos\sigma$, $y=r\sin\sigma$, z, pro nějž u, v, w hledáme, jest dána vzorcem:

$$\Delta^2=r^2+r'^2-2rr' \cos(\sigma'-\sigma)+(z-z')^2 \qquad (33)$$

Objemový elementem vlákna jest $d\tau'=r'\,d\omega'\,d\sigma'$, tudíž dle (6)

$$U_1=-\frac{r'\,d\omega'\,\Omega'}{2\pi}\int\frac{d\sigma' . \sin\sigma'}{\Delta}, \quad V_1=\frac{r'\,d\omega'\,\Omega'}{2\pi}\int\frac{d\sigma' \cos\sigma'}{\Delta} \qquad (34)$$

Integrace dle σ' jde dokola, tedy od $\sigma'=0$ do $\sigma'=2\pi$, neb pohodlněji od $\sigma'=\sigma$ do $\sigma'=\sigma+2\pi$. Zaveďme za $\sigma'-\sigma$ proměnnou ψ, uvažme že Δ jest úkonem argumentu $\cos\psi$, a že $\int_0^{2\pi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{\Delta}$ jest nullou, protože se příspěvky prvého a čtvrtého, jakož i druhého a třetího kvadrantu v integrálu ruší.

Jiný integrál v (34) se vyskytující

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{d\psi \cos\psi}{\Delta}=2\int_0^{\pi}\frac{d\psi\cos\psi}{\Delta}$$

transformuje se relacemi:

$$\cos\psi=2\cos^2\frac{\psi}{2}-1, \quad \frac{\psi}{2}=\frac{\pi}{2}-\varphi, \quad k^2=\frac{4rr'}{(r+r')^2+(z-z')^2},$$

$$\Delta^2=(r+r')^2+(z-z')^2-4rr'\cos^2\frac{\psi}{2}$$

$$=[(r+r')^2+(z-z')^2]\,[1-k^2\sin^2\varphi]$$

neb
$$\Delta^2=4\frac{rr'}{k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)$$

na
$$J=\frac{2k}{\sqrt{rr'}}\left(\left(\frac{2}{k^2}-1\right)F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{k^2}E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)\right), \qquad (35)$$

kdež

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (36)$$

Z rovn. (34) obdržíme tedy:

$$U_1 = -\frac{\sin \sigma}{2\pi} (r' \, d\omega' \, \Omega' J), \quad V_1 = \frac{\cos \sigma}{2\pi} (r' \, d\omega' \, \Omega' J) \quad (37)$$

Sečtení všech U_1 a V_1 dává $U = \Sigma(U_1)$, $V = \Sigma(V_1)$ tedy:

$$U = -\frac{y}{r} H, \quad V = \frac{x}{r} H; \quad H = \frac{1}{2\pi} \int d\omega' \, \Omega' r' J \quad (38)$$

Po provedení integrací v (38) závisí H jen na r, z. Odtud jde:

$$w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2H}{r} + \left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H}{r}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Hr) \quad (39)$$

$$u = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\cos \sigma \frac{\partial H}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} = -\sin \sigma \frac{\partial H}{\partial z},$$

tedy:

$$u \cos \sigma + v \sin \sigma = V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (Hr) \quad (40)$$

Pro kinetickou energii máme dle (9):

$$\frac{T}{\varrho} = \int d\tau \, . \, (U\xi + V\eta) = \int d\tau \, H\Omega = 2\pi \int d\omega \, \Omega \, Hr \quad (40^a)$$

Modul k elliptických integrálů v rovnici (36) má hodnotu nad míru malou, jde-li o účinek kruhového vlákna na velmi vzdálené body a jest téměř jedničce roven, jde-li o bod jemu blízký; (tehdy jsou $z' - z$ a $r' - r$ velmi malé proti r i r'). V případě posledním jest $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ skoro 1, ale $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ vyžaduje zvláštní úvahy, protože se jmenovatel

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi) = (1 - k \sin \varphi)(1 + k \sin \varphi)$$

při $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stane velmi malým. Řečené vztahuje se vlastně k prvému faktoru, kdežto druhý $1 + k \sin \varphi$ vždy konečným zůstává, takže nechybíme mnoho, kladouce v něm $k = 1$.

Zavedeme-li $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, pak $k^2 = 1 - k'^2$, a přibližně

$k = 1 - \frac{k'^2}{2}$, kdež

$$k'^2 = \frac{(r - r')^2 + (z - z')^2}{(r + r')^2 + (z - z')^2}, \text{ jest číslo velmi malé,} \qquad (41)$$

bude $\quad (1 - k^2 \sin^2 \varphi) = 4 \cos^4 \frac{\psi}{2}\left(tg^2 \frac{\psi}{2}\left(1 - \frac{k'^2}{4}\right) + \frac{k'^2}{4}\right)$,

tudíž až na veličiny vyššího řádu:

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\frac{\psi}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\psi}{2} + \frac{k'^2}{4}}}$$

$$= \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(tg \frac{\psi}{2} + \sqrt{\frac{k'^2}{4} + tg^2 \frac{\psi}{2}}\right) = \log \frac{4}{k'}, \qquad (41^a)$$

pak místo (35): $\quad J = \frac{2}{\sqrt{rr'}}\left(\log \frac{4}{k'} - 2\right) \qquad (42)$

V uvedených krajních případech $k = 0$ $k = 1$ dají se tedy elliptické integrály vyjádřiti obyčejnými transcendentami. *Zabývejme se zevrubněji případem druhým*, pro případ, jde-li o účinek *jednoho tenkého vírového prstenu.*

Bodem A, pro nějž u, v, w hledáme, a osou z položme meridianovou rovinu; tato seče prsten v průřezu, v němž se nalézá bod A' označující místo, kde vírové vlákno $d\omega'\Omega'$ průřezem postupuje. Položme $AA' = s = \sqrt{(r - r')^2 + (z - z')^2}$. Při tomto označení jest dle (41) až na veličiny vyššího řádu: $k' = \frac{s}{2r}$.

Odtud, pak z (38) a (42) plyne, položíme-li za $\sqrt{\frac{r'}{r}}$ v prvém sblížení jedničku:

$$H = \frac{1}{\pi}\int d\omega'\Omega' \left(\log \frac{8r}{s} - 2\right), \qquad (43)$$

tedy dle (40^a):

$$T = 2r\varrho \int d\omega\Omega \int d\omega'\Omega' \left(\log \frac{8r}{s} - 2\right) \qquad (43^a)$$

Z rovnic (39) a (40) jde:

$$w = \frac{H}{r} + \frac{\partial H}{\partial r}, \quad V_r = -\frac{\partial H}{\partial z}; \qquad (43^b)$$

dle (35) jest při zkráceném označení

$$\Psi(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{k} - k\right) - \frac{2}{k} E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \ldots J = \frac{2\Psi(k)}{\sqrt{r'r}},$$

tedy dle (38):

$$H = \frac{1}{\pi}\int d\omega' \Omega' \sqrt{\frac{r'}{r}} \cdot \Psi(k).$$

Odtud jde

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{\pi}\int d\omega' \Omega' \sqrt{\frac{r'}{r}} \cdot \frac{\partial \Psi(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{H}{2r}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int d\omega' \Omega' \sqrt{\frac{r'}{r}} \frac{\partial \Psi(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z}.$$

Je-li k málo rozdílné od *1*, bude dle (41ª)

$$\Psi(k) = \log \frac{4}{k'} - 2 = \log \frac{8r}{s} - 2,$$

$$\frac{\partial \Psi(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\log \frac{8r}{s} - 2\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{1}{s}\frac{r-r'}{s}, \text{(příbližně)}$$

podobně

$$\frac{\partial \Psi(k)}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{1}{s} \cdot \frac{z-z'}{r}.$$

Píšeme-li ještě v $\frac{\partial H}{\partial r}$ a $\frac{\partial H}{\partial z} \ldots \sqrt{\frac{r'}{r}} = 1$, máme dle (43ᵇ)

$$w = \frac{H}{2r} - \frac{1}{\pi}\int \frac{d\omega' \Omega'}{s} \frac{r-r'}{s}, \quad V_r = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\omega' \Omega'}{s} \frac{z-z'}{s} \qquad (44)$$

Z (44) vidíme, že rychlost bodu A jest předně složena z části $w_0 = \frac{H}{2r}$ rovnoběžné k ose z a z části jiné v (44) vyjádřené integrály, která jest tak veliká, jako kdy byl bod A kolem každého vlákna $d\omega'\Omega'$ v meridiánové rovině v točení uváděn rychlostí $\frac{d\omega'\Omega'}{\pi s}$. Jak porovnání s pozdějšími vývody učí, jest tato část pohybu tak veliká, jako kdyby vlákna byla rovná, nekonečná a na meridiánové rovině kolmá. Padne-li bod A do prstenu samého, bude dle (44) V_r veličinou o řádu $\int \frac{d\omega'\Omega'}{\varepsilon}$, kdež ε jest délkou o rozměrech (s) průřezu prstenového.

V rovnici (32) se vyskytující výraz $I = \Sigma(di\, r\, V_r\, z)$ se nezmění, jestli z o konstantu zvětšíme, protože $\Sigma di\, r\, V_r$ jest nullou. Dosadíme-li tedy za z .. $z - z_1 + z_1$, kdež z_1 jest souřadnicí na př. těžiště průřezového, přejde I ve výraz $\Sigma di\, r\, V_r(z - z_1)$. V něm jest $(z - z_1)$ o řádu ε, V_r o řádu $\frac{\Sigma(di)}{\varepsilon}$, tedy I o řádu $[\Sigma(di)]^2$, kdežto T v (32) jest dle (43ª) o řádu $[\Sigma(di)]^2 \log \frac{8r}{\varepsilon}$.

Při extremně tenkých prstenech bude tedy až na veličiny vyššího řádu místo (32):

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{T}{4\pi\varrho \,.\, \Sigma(di\, r^2)} = \frac{T}{4\pi\varrho i r_0^2}, \tag{44ª}$$

kdež $\Sigma(di) = i$ položeno jest.

Veličiny z_0, r_0 odpovídají vždy nějakému vláknu uprostřed ostatních; byť i neodpovídaly vždy témuž materiálnému vláknu, můžeme při extremně tenkých prstenech podle z_0 a r_0 posuzovati pohyb prstenu dle osy z a změnu jeho radia, která jest však nullou (skrz $r_0 = const$). Uvažme věc jinak. Dle rovnic (44) jest

$$\Sigma\, di\, V_r = \int d\omega\Omega \int \frac{d\omega'}{\pi s}\, \Omega' \,.\, \frac{z - z'}{s}$$

a zároveň nullou jakožto součet členů

$$\frac{d\omega\Omega \,.\, d\omega'\Omega'(z - z')}{\pi s}, \quad \frac{d\omega\Omega \,.\, d\omega'\Omega' \,.\, (z' - z)}{\pi s}$$

vždy po dvou se rušících a podobné platí, nahradíme-li $(z - z')$ výrazem $(r - r')$. Odtud a z (44) jde pak:

$$\Sigma(di\, w) = \Sigma\left(di \frac{dz}{dt}\right) = \int \frac{d\omega\Omega H}{2r}.$$

Dosadíme-li sem hodnotu z (40ª), máme

$$\Sigma\left(di \frac{dz}{dt}\right) = \frac{T}{4\pi\varrho r^2}.$$

di nezávisí na čase; máme tedy, kladouce ještě v prvém sblížení

$$r = r_0, \qquad \frac{d}{dt}(\Sigma\, di\, z) = \Sigma(i) \frac{dz'_0}{dt} = \frac{T}{4\pi\varrho r_0^2}.$$

Veličina $z_0' = \frac{\Sigma(di\, z)}{\Sigma(di)}$ jest opět jakousi střední hodnotou a dle (44ª) od *Helholtzem* zavedeného z_0 jen infinitesimálně rozdílna.

Podobně máme $\Sigma di V_r = \Sigma di \frac{dr}{dt} = 0$, neb

$$\frac{d}{dt} \Sigma di \,.\, r = const = r_0' \Sigma di.$$

Je-li Ω stálé, označují r_0', z_0' (neb i z_0) souřadnice těžiště průřezového.

V nepřítomnosti zevních sil jest T stálé a následkem toho postupuje dle (44[a]) střední souřadnice $z_0 = \frac{\Sigma (di \,.\, r^2 z)}{\Sigma (di \,.\, r^2)}$ směrem osy symmetrie (z) se stálou rychlostí, o jejímž směru rozhoduje znamení veličiny $i = \Sigma di$. Je-li kladné, to jest má-li osa kruhového víru směr vedoucí prvým kvadrantem od osy x-ové ku ose y-ové, bude i $\frac{dz_0}{dt}$ kladné; postup vlákna děje se tudíž ve směru, ve kterém se následkem víření pohybuje tekutina otvorem prstenu. Při konečném i jest $\frac{dz_0}{dt}$ téhož řádu jako T, totiž nekonečné o řádu $log \frac{r}{\varepsilon}$.

Při stálém Ω' lze H pro některé tvary průřezové přímo vypočítati. V průřezu prstenu rozeznávejme bod A, jemuž náleží poloměr r a souřadnice z a bod A', jemuž náleží r', z', $d\omega'$, Ω'. Dále budiž $AA' = s$. Pak jest dle (43)

$$H = \frac{1}{\pi} (log\, 8r - 2) \int d\omega' \Omega' - \frac{1}{\pi} \int d\omega' \Omega' \, log\, s.$$

Definujeme-li střední hodnotu s_0 výrazem:

$$log\, s_0 \int d\omega' \Omega' \,. = \int d\omega' \Omega' \,.\, log\, s,$$

tedy bude $$H = \frac{i}{\pi} \left(log \frac{8r}{s_0} - 2 \right) \qquad (44^b)$$

K vůli výpočtu veličiny s_0 předešleme několik slov o logarithmickém potenciálu P. Účinkuje-li hmota m v posici a, b na jednotku hmoty v posici x, y odpudivou silou $\frac{m \,.\, 1}{r}$, kdež $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, budou osové složky její

$$X = \frac{m}{r} \cdot \frac{x-a}{r} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Y = \frac{m}{r} \cdot \frac{y \quad b}{r} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

kdež $P = m \log r$ se nazývá logaritmickým potenciálem hmoty m v potenciálovém bodě x, y. Je-li hmot více, bude $P = \Sigma m \log r$. Položíme-li kolem bodů $m_1, m_2 \ldots m_n$ v rovině xy v sobě uzavřenou křivku, můžeme podobným spůsobem, jak se *Gaussova* věta dokazuje, odvoditi výsledek, že počet silokřivek z křivky vystupujících jest $2\pi(m_1 + m_2 + \ldots m_n)$. Applikací na hmotu plošně rozestřenou o hustotě σ nalezneme analogon věty *Laplace-Poissonovy* $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2\pi\sigma$. Takovým logarithmickým potenciálem jest výraz $P = \int d\omega' \Omega' \log s$, a sice hmoty rozestřené po průřezu prstenu s hustotou Ω'; potenciálovým bodem jest bod A. Při kruhovém průřezu o radiu ε_1 a stálém $\Omega' (= \sigma)$ splňuje potenciál P z *Laplace-Poissonovy* analogie odvozenou podmínku $\frac{d^2 P}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dP}{d\eta} = 2\pi\sigma$, kdež η označuje vzdálenost potenciálového A bodu od středu kruhu. Odtud jde: $\frac{dP}{d\eta}\eta = \pi\sigma\eta^2 + K$, při čemž $K = 0$ býti musí, protože při $\eta = 0$ „síla“ jest nullou a nikoli nekonečnou. Nová integrace dává $P = \frac{\pi\sigma}{2}\eta^2 + K_1$. K_1 jest identické s hodnotou potenciálu $\int\limits_{\eta=0}^{\eta=\varepsilon_1} 2\pi\eta d\eta\sigma \log \eta$ v centru kruhu.

Odtud jde:

$$P = \frac{\pi\sigma}{2}\eta^2 + \frac{\pi\sigma}{2}\varepsilon_1^2 (2 \log \varepsilon_1 - 1), \text{ pak } \log s_0 = \left(\frac{\eta^2}{2\varepsilon_1^2} + \log \varepsilon_1 - \frac{1}{2}\right)$$

a následkem toho

$$H = \frac{i}{\pi}\left(\log \frac{8r}{\varepsilon_1} - \frac{3}{2} - \frac{\eta^2}{2\varepsilon_1^2}\right) \tag{45}$$

Dle (40^a) bude:

$$T = 2\pi r \varrho \int d\omega H\Omega = 2\pi r \varrho \Omega \int\limits_{\eta=0}^{\eta=\varepsilon_1} 2\pi d\eta \eta H,$$

neb

$$T = 2\varrho i^2 r \left(\log \frac{8r}{\varepsilon_1} - \frac{7}{4}\right) \tag{45a}$$

(Dle poznámky v § 55 I obdržíme z (45^a) výraz pro magnetickou energii příslušnou proudu i násobením na $\frac{\pi}{\varrho}$. Ná-

sledkem toho jest koefficient samoindukce pro kruhový drát o poloměru r a tlouštce $2\varepsilon_1$ roven $4\pi r\left(log\frac{8r}{\varepsilon_1}-\frac{7}{4}\right)$.)

Pomocí (45) a (44) lze pohyby jednotlivých vláken prstenových do detailů poznati. Náleží-li středu průřezu prstenového $r=\bar{r}$, $z=\bar{z}$, bude $\eta^2=(r-\bar{r})^2+(z-\bar{z})^2$ a

$$w=\frac{i}{2\pi r}\left(log\frac{8r}{\varepsilon_1}-\frac{2}{2}-\frac{\eta^2}{2\varepsilon_1^2}\right)-\frac{i\,(r-\bar{r})}{\pi\varepsilon_1^2},\quad V_r=\frac{i\,(z-\bar{z})}{\pi\varepsilon_1^2}$$

$$\left(\text{skrz}\int\frac{d\omega'}{s}\cdot\frac{r-r'}{s}=\frac{\partial}{\partial r}\int d\omega'\,log\,s=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\pi\eta^2}{2}+K_1\right]=\pi\,(r-\bar{r})\text{ atd.}\right)$$

Vidíme odtud, že střed kruhu radiálné rychlosti nemá, že následkem členů $-\frac{i\,(r-\bar{r})}{\pi\varepsilon_1^2}$, $\frac{i\,(z-\bar{z})}{\pi\varepsilon_1^2}$ odpovídajících vzájemnému točivému effektu vláken rychlost padá do periferie průřezu prstenového, a že mimo to až na veličiny vyššího řádu postupuje každé vlákno prstenové rychlostí $\frac{i}{2\pi\bar{r}}\,log\frac{8\bar{r}}{\varepsilon_1}$ dle osy z. Průřez se tedy nedeformuje.

Ze vzorců (44), které jsou v platnosti i pro svazek velmi tenkých a sobě blízkých prstenů, jehož průřez jest nepatrný proti poloměru, můžeme bez počtu usouditi, jak na sebe v dostatečné blízkosti účinkovati budou *dva* za sebou běžící prsteny (s vířením patrně stejnosměrným). Dohoní-li se prsten předchozí stejným následujícím, bude prvý effekt nastalého sblížení (viz obr. 18.) ten, že se radius předchozího zvětší a následujícího zmenší a sice následkem tendence, že jeden vír hledí částice druhého kol sebe v rotaci uvésti. Táž příčina hledí předchozí se zvětšující zpozďovati a následující urychlovati. Jest to účinek vyjádřený v rovnicích (44) integrály. K němu přistupuje effekt příslušný členu $\frac{H}{2r}$. Ve výrazu pro H (rovn. 43) dlužno pak integraci vztáhnouti na průřezy obou prstenů. Jde-li o pohyb prstenu předchozího, vede integrace přes jeho průřez k výsledku o řádu $log\frac{8r}{\varepsilon}$, kdež ε jest délkou o rozměrech průřezu, kdežto integrace druhá dává veličinu o řádu $log\frac{8r}{\Delta}$, kdež Δ jest veličinou o řádu distance obou prstenů. Prvý výsledek odpovídá rychlosti w_0, kterou by předchozí prsten měl v nepřítomnosti

druhého a která jest jen málo modifikována, je-li Δ značné proti ε. Jelikož ale $w_0 = \frac{H}{2r} = \frac{i}{2\pi r_0}\left(log \frac{8r_0}{s_0} - 2\right)$ [viz (44[b])] na r_0 závisí, bude sblížením nastalé zvětšení poloměru r_0 míti za následek další energické zmenšení rychlosti předchozího; neboť $\frac{dw_0}{dr_0} = -\frac{i}{2\pi r_0^2}\left(log \frac{8r_0}{s_0} - 1\right)$ jest velmi značným číslem o řádu $log \frac{8r_0}{s_0}$. Bude se tedy předchozí prsten silně zpozďovati a zároveň zvětšovati, zadní stahovati a urychlovati, takže konečně prvým prstenem jako branou proběhne, jak se ostatně experimenty s prstěnky kouřovými dokázati dá. Mezi středními radii r_1, r_2 obou prstenů platí dle rovnice (29[a])

$$\Sigma (di\, r^2) = const = \Sigma_1 (di \,.\, r^2) + \Sigma_2 (di \,.\, r^2)$$

vztah:

$$\Sigma_1 (di) \,.\, r_1^2 + \Sigma_2 (di) \,.\, r_2^2 = const, \tag{46}$$

jímž změny poloměrů na jisté meze vázány jsou. Je-li víření v obou prstenech směru protivného, běží-li tedy víry *proti* sobě, nastane, jak jednoduchý nákres učí, *současné* zvětšování *obou* radiů a následek toho jest klesání rychlostí postupných. Je-li $\Sigma_1 (di) = - \Sigma_2 (di)$, bude $(r_1^2 - r_2^2) \Sigma_1 (di) = const$, může tedy r_1 i r_2 vzrůsti na obnos nekonečný a rychlost klesnouti na obnos nullový. Jsou-li také poloměry stejné, bude v rovině symmetrie uprostřed prstenů rychlost tekutiny míti směr této roviny; lze tedy tuto rovinu symmetrie učiniti pevnou. Případ víru běžícího k nekonečné pevné rovině jest pak identický s případem dvou vírů proti sobě běžících: vír se blíží stěně pomaleji a pomaleji a radius jeho roste do nekonečna. Jak již *Helmholtz* ukázal, lze se o tom přesvědčiti, když kruhovou desku ponoříme ve vertikálné poloze zpola do tekutiny, ji rychle o malý kousek v horizontálném směru posuneme a náhle vytáhneme. Tekutina na přední straně desky odhozená vrací se na zadní stranu její a utvoří podél okraje desky po vytáhnutí jejím vírové *polokruhové* vlákno, jehož konce na povrchu vodním se prozrazují dolíky, jichž distance roste, když vír se stěně nádoby blíží.

§ 58. ***Rovnoběžná vlákna vírová. Válec elliptický.*** Vlákna mějtež vesměs směr osy z a sahejtež od $z = -\infty$ do $z = \infty$. Co do rozdělení jejich v rovině x, y předpokládejme, že leží při sobě vesměs v konečnu. Pohyb jejich děje se jen na příč, tak že jest

$w=0$; u, v jest na z nezávislé, mimo to $\xi=\eta=0$. Z rovnic (14) kap. II. jde pak, že ζ, intensita víření pro určité vlákno, na čase nezávisí, tudíž se nemění i průřez jeho. Z vektorových potenciálů jest jen W od nully rozdílný a identický s obyčejným potenciálem hmoty, která s hustotou $\frac{\zeta}{2\pi}$ po prostoru rozdělena jest. Položíme-li kolem centra souřadnic kouli o nekonečně velikém poloměru R, zbudou ve vnitřku jejím části vláken, vesměs stejně dlouhé, k nimž dle vývodů na konci § 54. při výpočtu vektoru W jedině hleděti jest.

Provedení počtu jest jen v řídkých případech možné, na př. tehdy, vyplňují-li vlákna se všude stejným ζ nekonečně dlouhý elliptický válec o poloosách a, b. Položíme-li do nich osy souřadnicové a považujeme-li válec za ellipsoid o poloosách a, b, s nekonečně velikou třetí poloosou c, najdeme pomocí rovnic (7ᵇ, 7ᶜ, IV.) pro body uvnitř neb na povrchu vírového prostoru položené vztahy:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=-\zeta abx\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b^2+\lambda}}=-\frac{2\zeta ab}{a+b}\cdot\frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=-\zeta aby\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2+\lambda}}=-\frac{2\zeta ab}{a+b}\cdot\frac{y}{b}.$$

Odtud jde dle (7ᵃ)

$$u=-G\frac{y}{b},\quad v=G\frac{x}{a},\quad \text{kdež}\quad G=\frac{2\zeta ab}{a+b} \tag{47}$$

Jest tedy rychlost na povrchu válce $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$ stálou a směru tangenciálného. Vlákno, které jednou bylo na povrchu prostoru vírového, bude na něm vždy ležeti. Jsou-li souřadnice jeho v čase t: x, y, budou v čase $t+dt$: $x_1=x-G\frac{y}{b}dt$, $y_1=y+G\frac{x}{a}dt$.

Odtud: $x=x_1+G\frac{y_1}{b}dt$, $y=y_1-G\frac{x_1}{a}dt$. Pro vlákna v čase t na povrchu válce ležící jest $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, tedy bude v čase $t+dt$ povrchem prostoru vírového opět elliptický válec o rovnici:

$$1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+2x_1y_1\,G\frac{dt}{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Jest to táž ellipsa jako dříve. Neboť otočíme-li tuto o úhel φ, bude rovnice její v původní soustavě:

$$x^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)+y^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{b^2}+\frac{\sin^2\varphi}{a^2}\right)$$

$$+\,2xy\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1$$

a pro malé úhly φ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2xy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\varphi=1$. *Odtud jde, že vírový válec tvar svůj nemění a že se točí angulárnou rychlostí*

$$\zeta_0=\frac{G}{a+b}=\frac{2ab\zeta}{(a+b)^2} \qquad (47^a)$$

Vzájemná posice vláken může se při tom arciť měniti. Po každém půlotočení válce existuje v témže místě prostoru, byť i tam jiné vlákno bylo, *táž rychlost*, protože tvar vírového prostoru jest týž. Můžeme se domnívati, že se také každé vlákno během této doby do své posice navrátí. Stane se to, jak dokážeme, tím spůsobem, že v absolutním prostoru opisuje kruh, při čemž *jiným* vláknům přísluší *jiný poloměr* a *jiný střed*. Nahoře (47) udané veličiny u, v jsou projekce absolutní rychlosti vlákna na okamžité poloosy ellipsy. Vlákno s nimi pevně spojené mělo by následkem rotace absolutní rychlost, jejíž složky jsou $u_1=-\zeta_0 y$; $v_1=\zeta_0 x$, relativná rychlost vlákna vůči poloosám xy ellipsy jest tedy:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=u-u_1=-G\frac{y}{b}+\zeta_0 y=-\zeta_0\frac{a}{b}\cdot y\\ \frac{dy}{dt}&=v-v_1=G\frac{x}{a}-\zeta_0 x=\zeta_0\frac{b}{a}\cdot x\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Integrace dává:

$$x=af\,.\cos(\zeta_0 t+\mu),\quad y=bf\,.\sin(\zeta_0 t+\mu); \qquad (49)$$

f a μ jsou integrační konstanty, z nichž f *jest* <1, protože poloosy ellipsy, již dle (49) vlákno *relativně* k systému os válce elliptického opisuje, jsou menší než a potažmo b. Svírá-li poloosa x s osou x' systému v prostoru pevného úhel $\varphi=\zeta_0 t$, bude

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\quad y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

Dosazením za x a y z (49) obdržíme:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a+b}{2} f . \cos (2\zeta_0 t + \mu) + c_1 \\ y' &= \frac{a+b}{2} f \ \sin (2\zeta_0 t + \mu) + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

c_1 a c_2 nezávisí od času. Trajektorie vlákna v absol. soustavě souřadnic jest tedy kruh s poloměrem $\frac{a+b}{2} f$ a se středem c_1, c_2; angulárná rychlost oběhu jest $2\zeta_0$.

§ 59. ***Kruhový válec vírový.*** O případu, kdy vírová vlákna vyplňují *kruhový* válec o poloměru a, pojednáme zvláště a něco všeobecněji, předpokládajíce jednak, což možná jest, *diskontinuitu* tangenciálné rychlosti na povrchu jeho, jinak ve válci tekutinu jinou než mimo něj. Normálová rychlost a tlak musí arciť býti spojitými při prostupu válcovou plochou. Výrazy $u = \frac{\partial W}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial W}{\partial x}$, kdež W jest tak zvaná „proudová funkce" *Stokesova*, vyhovují bez restrikce rovnici kontinuity $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Připomínajíce si, že v nákresné rovině jde osa y-ová dolů, osa x-ová na pravo, můžeme také říci, že komponenta rychlosti dle jistého směru A jest differenciálným kvocientem veličiny W dle kolmého směru B, jenž nám leží po pravé straně, hledíme-li do předu směrem A. Z rovnice $2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ jde jako dříve $-2\zeta = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$. Pomocí vztahů $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ transformuje se tato rovnice na jinou, v níž se vyskytují polárné souřadnice r, φ:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r . \frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = -2\zeta r \tag{51}$$

V případě kruhového válce se stejným všude ζ nezávisí nic na φ, tedy jest jednak $\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$, což znamená, že radiálné rychlosti jsou vesměs nullou, jinak máme:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial W}{\partial r}\right) = -2\zeta r, \tag{52}$$

což integrováno dává:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\zeta r + \frac{C}{r}, \text{ a } W = -\zeta\frac{r^2}{2} + C \log r + D \quad (53)$$

Konstantu D lze voliti nullou.

Ve válci nemůže býti při $r=0$ rychlost nekonečně velikou, jest tedy zde voliti $C=0$, takže máme $W_i = -\zeta\frac{r^2}{2}$.

Mimo válec jest $\zeta=0$ a $W_e = C \log r$. Dle dříve zmíněného pravidla jest tangenciálná rychlost τ ve směru rostoucího φ $\tau = -\frac{\partial W_i}{\partial r}$ uvnitř válce $=\zeta r$. Vírový válec točí se tudíž jako celek kol své osy angulárnou rychlostí ζ. Mimo válec jest

$$\tau = -\frac{\partial W_e}{\partial r} = -\frac{C}{r}.$$

Konstanta C určí se z *předepsané* při $r=a$ difference $\tau_e - \tau_i$ pomocí vztahu: $\tau_e - \tau_i = -\left(\frac{C}{a} + \zeta a\right)$.

Není-li diskontinuity, bude $C = -a^2\zeta$, tedy uvnitř, potažmo mimo válec

$$W = -\frac{(a^2\zeta\pi)}{2\pi}\cdot\frac{r^2}{a^2}, \quad W = -\frac{(a^2\zeta\pi)}{\pi}\log r, \text{ pak } \tau_e = \frac{a^2\zeta\pi}{\pi r} \quad (53^a)$$

Válec vírový hledí tu kolem sebe každým zevnějším bodem točiti rychlostí ubývající s distancí r tak, jako kdyby všechna vlákna jeho byla koncentrována v ose válcové. (Analogií jsou magnetické silokřivky kolem dlouhého rovného drátu, jímž prochází proud.) V každém místě prostorovém jest patrně u a v na t nezávislé a mimo to $w=0$. Položíme-li tudíž v rovnicích (12, kap. II.) $p' = \xi = 0$, $q' = \eta = 0$, $r' = \zeta$, pak $u = \frac{\partial W}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial W}{\partial x}$, obdržíme integrací vztah:

$$\frac{p}{\varrho} = const - \tfrac{1}{2}V^2 - 2\zeta W - P.$$

Při tom jest $V^2 = u^2 + v^2 = \tau^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2$. Není-li (jak předpokládáme) sil zevnějších, položí se potenciál jejich $P=0$.

Tím bude $\frac{p_e}{\varrho_e} = const - \frac{C^2}{2r^2}$ mimo válec a $\frac{p_i}{\varrho_i} = const' + \zeta^2 \frac{r^2}{2}$ uvnitř. Prvá konstanta se určí z tlaku p_∞ v nekonečnu vztahem $p_\infty = const\, \varrho_e$, druhá ze vztahu $p_e = p_i$ na rozhraní $r = a$ pomocí

$$const\, \varrho_e - \varrho_e \frac{C^2}{2a^2} = \left(const' + \zeta^2 \frac{a^2}{2}\right) \varrho_i.$$

Tlak v centru válce p_0 jest tedy

$$p_0 = p_\infty - \frac{\varrho_i (a\zeta)^2}{2} - \frac{\varrho_e C^2}{2a^2} = p_\infty - \varrho_i \frac{(a\zeta)^2}{2} - \frac{\varrho_e}{2} \left((\tau_i - \tau_e) - \zeta a\right)^2.$$

Je-li $\tau_i = \tau_e$, obnáší depresse tlaku v ose víru $\frac{(\varrho_i + \varrho_e) a^2 \zeta^2}{2}$ neb $\frac{\varrho_e + \varrho_i}{2} (\tau_{r=a})^2$. *Dutý vír* povstane při $\varrho_i = 0$; pak jest $W_i = 0$, $W_e = C \log r$ a p_e musí pro $r = a$ míti hodnotu nulle rovnou, což vede skrz $C = -a \tau_{(r=a)}$ ku $\tau^2_{(r=a)} = \frac{2p_\infty}{\varrho_e}$. Tím jest ustanovena rychlost oběhu τ na dutině vírové.

§ 60. *Stabilní oscillace vírového válce.* Mysleme si válec o průřezu přibližně kruhovitém a značiž $a + \nu$ okamžitý radius vektor příslušný k polárnému úhlu φ. Normálová úchylka ν budiž velmi malá; $\nu = f(t, \varphi)$ jest pak rovnicí okamžité kontury válcové. Úloha jest řešitelna, protože lze poměrně snadno vyšetřiti vektorový potenciál W. Předpokládejme k vůli jednoduchosti *spojitost* tangenciálných rychlostí. Pak se skládá W z hodnoty $W^{(0)}$ příslušné ku $\nu = 0$ a z části $W^{(1)}$, která od poruchů ν pochází. Patrně jest $W^{(1)}$ tak veliké, jako by pocházelo od *povrchového* náboje, jenž hustotou $\nu \frac{\zeta}{2\pi}$ po válci rozestřen jest. $W^{(1)}$ vyhovuje vnitř a zevnitř *Laplace-ově* rovnici, jest spojitým úkonem i při prostupu plochou válcovou a splňuje pro $r = a$ známou podmínku:

$$\left/ \frac{\partial W_e^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial r} \right._{r=a} = -4\pi \left(\nu \frac{\zeta}{2\pi}\right) = -2\nu\zeta \qquad (54)$$

Veličina ν jest periodickým úkonem argumentu φ s periodou 2π, dá se tedy pomocí *Fourierova* theoremu rozvinouti v řadu:

$$\nu = \sum_{n=0} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) = f(t, \varphi), \qquad (55)$$

kdež α_n, β_n závisí jen od času. Následkem toho klademe také:

$$W^{(1)} = \sum_{n=0} (f_n \cos n\varphi + g_n \sin n\varphi), \tag{56}$$

kdež f_n a g_n na čase a na r závisí. Tuto poslední závislost určíme pomocí *Laplace-ovy* rovnice, jíž jak $f_n \cos n\varphi$, tak $g_n \sin n\varphi$ vyhovovati musí, tedy rovnicí:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial f_n}{\partial r} \cos n\varphi\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (f_n \cos n\varphi) = 0$$

neb

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r} f_n = 0,$$

kterou splňuje

$$f_n = \bar{f}_n \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^n, \text{ neb též } f_n = \bar{f}_n \frac{r^{-n}}{a^{-n}},$$

kdež $\bar{f}_n$ jen od času záviseti může. Podobně se má věc s g_n.

Lze tedy položiti pro vnitřní, potažmo zevnější body

$$\left.\begin{aligned} W_e^{(1)} &= \sum_{n=0} \left(\frac{a}{r}\right)^n (\bar{f}_n \cos n\varphi + \bar{g}_n \sin n\varphi) \\ W_i^{(1)} &= \sum_{n=0} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\bar{f}_n \cos n\varphi + \bar{g}_n \sin n\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Podmínce spojitosti úkonů $W_i^{(1)}$ a $W_e^{(1)}$ při $r = a$ jest tím vyhověno. Supponujme však k vůli jednoduchosti, že ze všech členů *Fourierovy* řady existuje jen n-tý, tak že $W_e^{(1)}$ i $W_i^{(1)}$ znamenají jen n-tý člen hořejší summy. Z povrchové podmínky (54) jde:

$$-2\nu\zeta = -2\zeta\,(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) = -\frac{2n}{a}(\bar{f}_n \cos n\varphi + \bar{g}_n \sin n\varphi),$$

tedy: $$\bar{f}_n = \frac{a\zeta}{n}\alpha_n;\quad \bar{g}_n = \frac{a\zeta}{n}\beta_n.$$

Normálová rychlost $\dot{\nu}$ pochází jen od existence členů ν a jest dle nahoře uvedeného pravidla $\frac{1}{r}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \varphi}$, tedy na povrchu válce:

$$\dot{\nu} = \frac{n}{a}(\bar{g}_n \cos n\varphi - \bar{f}_n \sin n\varphi) = \zeta\,(\beta_n \cos n\varphi - \alpha_n \sin n\varphi) \tag{58}$$

Tangenciálná rychlost se přítomností velmi malých poruchů ν změní jen nekonečně málo a jest $\tau = \zeta a$.

Vlákno, které leželo kdys na povrchu prostoru vírového, bude na něm vždy ležeti. Všimněme si jednoho z nich, jemuž v čase t přísluší $r = a + \nu$, pak φ. Po čase dt jest při radiálné rychlosti $\dot{\nu}$ jeho úchylkou normálovou: $\nu + \dot{\nu} dt$ a jeho $\varphi \ldots$ $\varphi + \frac{\tau}{a} dt$ čili $\varphi + \zeta dt$. Protože vlákno v čase $t + dt$ opět leží na povrchu, jehož rovnicí nyní jest $\nu = f(t + dt, \varphi)$, bude:

$$\nu + \dot{\nu} dt = f(t + dt, \varphi + \zeta dt)$$

neb skrz $\nu = f(t, \varphi)$ $\quad \dot{\nu} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \zeta$

neb skrz $\quad \nu = f(t, \varphi) = \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$

$$\zeta (\beta_n \cos n\varphi - \alpha_n \sin n\varphi) = n\zeta (\beta_n \cos n\varphi - \alpha_n \sin n\varphi)$$

$$+ \left(\frac{d\alpha_n}{dt} \cos n\varphi + \frac{d\beta_n}{dt} \sin n\varphi \right)$$

neb

$$\zeta . \beta_n (1 - n) = \frac{d\alpha_n}{dt}$$

$$- \zeta \quad \alpha_n (1 - n) = \frac{d\beta_n}{dt}.$$

Rovnice se dají snadno integrovati výrazy:

$$\alpha_n = f . \cos (\overline{n - 1}\, \zeta t + \sigma)$$
$$\beta_n = f . \sin ((n - 1) \zeta t + \sigma) \qquad (59)$$

Byla-li tedy v jistém okamžiku deformace válce nekonečně malou, zůstane jí; vírový válec kruhový jest tedy tvarem stabilním.

Podobně lze jednati o stabilitě prstenu vírového atd. Vyšetřování podmínek stability pro rozmanité útvary vírové a hlavně kombinace jejich má nemalý význam se zřetelem na vírovou atomistiku *W. Thomsona*, v níž nezrušitelnost a individuálnost *materiálně* myšlených atomů chemie nalezla význam čistě dynamický v koordinovaných vlastnostech elementárných vírů jakéhos hypothetického ale *spojitého* fluida světového (aetheru).

§ 61. ***Výpočet kinetické energie*** může se u rovnoběžných do nekonečna jdoucích vláken jedině vztahovati na prostor obsažený mezi dvěma rovnoběžnými xy rovinami o distanci na př. $= 1$

a válcovým pláštěm o nad míru velikém ale určitém poloměru R. Na základnách takového válce jest $\cos nx = \cos ny = 0$, $\cos nz = \pm 1$, tedy skrz $w = 0$: $u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = 0$; na plášti platí totéž, protože víry účinkují do nekonečna tak jako jeden součtový vír v ose z, tak že tu vzniká jen tangenciálný pohyb. Nazveme-li $\int d\omega\, \zeta = \Omega$, bude na plášti nekonečného válce (viz 53[a])

$$W = -\frac{\Omega}{\pi} \log r, \quad u = -\frac{\Omega}{\pi} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{y}{R} = \frac{\Omega \cos ny}{\pi R}, \quad v = -\frac{\Omega}{\pi R} \cos nx$$

(protože v nekonečnu jest $x = -R \cos nx$, $y = -R \cos ny$ při směru normály do vnitř čítaném). Dále jest $d\tau = dx\, dy \,.\, 1$, a na plášti $d\omega = R d\varphi \,.\, 1$. Tím obdržíme pro kinetickou energii T v řečeném válci dle (8[a]) výraz:

$$\frac{2T}{\varrho} = 2 \iint dx\, dy\, \zeta \,.\, W + \int_0^{2\pi} d\varphi\, R\, W (v \cos nx - u \cos ny)$$

neb

$$\frac{T}{\varrho} = \iint dx\, dy\, \zeta\, W + \frac{\Omega^2}{\pi} \log R \tag{60}$$

Výraz T má jen při $\Omega = 0$ hodnotu na R nezávislou. Druhý výraz pro T v rovnicích (12[a]) a (12[b]) přejde v:

$$\frac{T}{\varrho} = 2 \iint dx\, dy\, \zeta\, (yu - xv) + \tfrac{1}{2} \iint dx\, dy\, (u^2 + v^2) + \int_0^{2\pi} R\, d\varphi \left(\frac{\Omega^2}{2\pi^2 R^2} \right) R$$

Druhý a třetí integrál pochází tu od H v (12[b]), jeden se vztahuje k základnám, druhý k plášti válce hraničného. Prostřední integrál jest T/ϱ, tedy bude:

$$\iint dx\, dy\, \zeta\, (yu - xv) + \frac{\Omega^2}{2\pi} = 0 \tag{61}$$

Poslední rovnice jest nezávislá na poloze souřadnicového systému a následkem toho jsou v platnosti rovnice podobné rovnicím (14) a (15), tedy

$$\iint dx\, dy\, v\, \zeta = 0, \quad \iint dx\, dy\, u\, \zeta = 0, \quad \iint dx\, dy\, \zeta \,.\, (ux + vy) = 0 \tag{62}$$

Považujeme-li v prvých dvou rovnicích (62) ζ (obrazně) za plošnou hustotu, můžeme je nahraditi větou, že těžiště vírů definované souřadnicemi

$$x_0 = \frac{\iint dx\, dy\, x\, \zeta}{\iint dx\, dy\, \zeta}, \quad y_0 = \frac{\iint dx\, dy\, y\, \zeta}{\iint dx\, dy\, \zeta}$$

během času svou posici nemění. Poznáme to, když derivujíce x_0, y_0 dle t za rychlost vlákna $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ dosadíme u, v a uvážíme, že ($\zeta\, dx\, dy$), intensita vlákna, jest veličinou na čase nezávislou.

Z třetí rovnice (62) jde

$$\iint dx\, dy\, \zeta \left(\frac{dx}{dt} \cdot x + y \frac{dy}{dt} \right) = 0$$

neb:

$$\iint dx\, dy\, \zeta\, r^2 = const \tag{62^a}$$

Z rovnice (61) jde:

$$\iint dx\, dy\, \zeta \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\Omega^2}{2\pi} = 0, \tag{63}$$

neb, zavedeme-li $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, pak

$$\frac{dx}{dt} = -y \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} x + \frac{dr}{dt} \sin \varphi,$$

$$\frac{\Omega^2}{2\pi} = \iint (dx\, dy\, \zeta)\, r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \int di\, r^2 \frac{d\varphi}{dt} \tag{64}$$

(při označení $\zeta\, dx\, dy = di$). Věta (64) jest analogon věty mechanické o plochách průvodičem opsaných.

Předpokládejme nyní existenci většího počtu od sebe oddělených válců vírových *1*, *2*, ... m a applikujme na ně věty předchozí. Těžiště x_m, y_m m-tého z nich jest definováno rovnicemi:

$$x_m = \frac{\Sigma_m (di \,.\, x)}{\Sigma_m (di)} = \frac{\Sigma_m (di \,.\, x)}{i_m}, \quad y_m = \frac{\Sigma_m (di \,.\, y)}{i_m}, \tag{64^a}$$

při čemž součet Σ_m vztahuje se na vlákna válce m-tého, jehož intensitou jest i_m. Věta o těžišti dává

$$S(i_m x_m) = c_1, \quad S(i_m y_m) = c_2, \tag{65}$$

kdež součet S se vztahuje ku všem válcům. Těžiště celého systému jest definováno souřadnicemi $x_0 = \frac{S(i_m x_m)}{S(i_m)}$, $y_0 = \frac{S(i_m y_m)}{S(i_m)}$.

Obraťme se k rovnici (63).

Rychlost $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ vlákna m-tého válce rovná se rychlosti

těžiště $\frac{dx_m}{dt}$, $\frac{dy_m}{dt}$ rozmnožené o relativnou rychlost vlákna $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ vůči parallelnímu systému jdoucímu těžištěm válce. Jsou-li v tomto systému x', y' souřadnice vlákna, bude dle definice těžiště $\Sigma_m (di \,.\, x') = 0$, $\Sigma_m (di \,.\, y') = 0$. Vypočtěme napřed v (63) integrál, pokud se vztahuje k válci m-tému, to jest

$$\Sigma_m di\left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \Sigma_m di\left[(y_m + y')\left(\frac{dx_m}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right) - (x_m + x')\left(\frac{dy_m}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)\right]$$

$$= \Sigma_m di\left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt}\right) + i_m\left(y_m \frac{dx_m}{dt} - x_m \frac{dy_m}{dt}\right).$$

Substitucí $x' = r' \cos \varphi'$, $y' = r' \sin \varphi'$, $x_m = r_m \cos \varphi_m$, $y_m = r_m \sin \varphi_m$ obdržíme za týž součet

$$\Sigma_m = - i_m r_m^2 \frac{d\varphi_m}{dt} - \Sigma_m di\, r'^2 \frac{d\varphi'}{dt} \qquad (65^a)$$

Předpokládáme-li tenké a od sebe dostatečně vzdálené válce vírové, bude vniterný pohyb v každém z nich nezávislý na přítomnosti ostatních. Touto poznámkou a pomocí rovnice (64), v níž odpovídajíc existenci jen m-tého válce $\Omega = i_m$ položíme, můžeme určiti $\Sigma_m di\, r'^2 \frac{d\varphi'}{dt}$.

Položíme-li totiž počátek souřadnic do těžiště, bude $r = r'$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt}$, tedy dle (64) $\Sigma_m \left(di\, r'^2 \frac{d\varphi'}{dt}\right) = \frac{i_m^2}{2\pi}$, a následkem toho místo (65)^a):

$$\Sigma_m = - i_m r_m^2 \frac{d\varphi_m}{dt} - \frac{i_m^2}{2\pi} \qquad (65^b)$$

Utvořme nyní součet přes všechny válce, jak toho (63) vyžaduje, dosaďme tu $\Omega = i_1 + i_2 + \ldots$ a obdržíme:

$$S\left(i_m r_m^2 \frac{d\varphi_m}{dt}\right) = \frac{i_1 i_2 + i_1 i_3 + \ldots + i_2 i_3 + i_2 i_4 + \ldots i_3 i_4 + \ldots}{\pi} \qquad (66)$$

Rovnice (62^a) dává podobně:

$$S\,(i_m r_m^2) = const \qquad (67)$$

V rovnici (60) pochází W integrálu: $\iint dx\,dy\,\zeta\,W$, příslušné k určitému vláknu x, y m-tého válce, dílem od vláken jeho dílem od vláken válců ostatních. Prvá část W_1 závisí na okamžitém tvaru válce, jenž při značné distanci ostatních válců polohou jejich se neřídí. Následkem toho jest hořejší integrál vztažený na m-tý válec, v němž za $W \ldots W_1$ dosazeno jest, tak veliký, jakým by byl, kdyby m-tý válec sám o sobě existoval, tedy dle rovnice (60), která i v tomto speciálném případě svou platnost podržuje, veličinou stálou. Druhou část W_2 pocházející od ostatních vzdálených válců lze dle (53^a) vyjádřiti vzorcem

$$-\frac{1}{\pi}(i_1 \log \varrho_1 + i_2 \log \varrho_2 + \ldots), \qquad (67^a)$$

kdež

$$\varrho_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2; \quad \varrho_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 \text{ atd.} \qquad (67^b)$$

Při výpočtu $\iint dx\,dy\,\zeta\,W_2$ příslušného m-tému válci můžeme až na veličiny vyššího řádu položiti $x = x_m$, $y = y_m$. Jestliže tedy píšeme $r^2_{m1} = (x_m - x_1)^2 + (y_m - y_1)^2$ atd., pak

$$P_m = -(i_1 \log r_{m1} + i_2 \log r_{m2} + \ldots), \qquad (67^c)$$

bude:

$$\iint dx\,dy\,\zeta\,(W_1 + W_2) = const + \frac{i_m}{\pi} P_m.$$

Dosadíme-li tuto a podobné hodnoty do (60) a kontrahujeme, co stálého jest, obdržíme:

$$\pi\left(\frac{T}{\varrho} - const\right) = -S\,i_m (i_1 \log r_{m1} + i_2 \log r_{m2} + \ldots) = S\,(i_m P_m). \; (67^\alpha)$$

Těžiště m-tého válce pohybuje se dle (64^a rychlostí

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\Sigma_m\left(di\,\dfrac{dx}{dt}\right)}{\Sigma_m\,(di)} = \frac{\Sigma_m\left(di\,\dfrac{\partial W}{\partial y}\right)}{i_m}.$$

Dle (67^a) jest

$$W = W_1 - \frac{1}{\pi}(i_1 \log \varrho_1 + i_2 \log \varrho_2 \ldots) = W_1 + \frac{P}{\pi},$$

tedy

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W_1}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{1}{\pi},$$

kdež

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\left(\frac{i_1}{\varrho_1}\,\frac{y - y_1}{\varrho_1} + \frac{i_2}{\varrho_2}\,\frac{y - y_2}{\varrho_2} \ldots\right)$$

jest až na veličiny vyššího řádu nahraditelno výrazem

$$-\frac{\partial}{\partial y_m}(i_1 \log r_{m1} + i_2 \log r_{m2} \ldots) \quad \text{čili} \quad \frac{\partial P_m}{\partial y_m}$$

Výraz $\dfrac{\Sigma_m\left(di\,\dfrac{\partial W_1}{\partial y}\right)}{i_m}$ jest patrně roven rychlosti těžiště m-tého válce, kdyby sám v prostoru se nalézal, tedy nullou. Odtud jde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_m}{dt} &= -\frac{1}{\pi}\frac{\partial P_m}{\partial y_m} = -\frac{i_1}{\pi r_{m1}}\cdot\frac{y_m - y_1}{r_{m1}} - \frac{i_2}{\pi r_{m2}}\cdot\frac{y_m - y_2}{\pi r_{m2}} - \text{atd.} \\ \frac{dy_m}{dt} &= -\frac{1}{\pi}\frac{\partial P_m}{\partial x_m} = +\frac{i_1}{\pi r_{m1}}\cdot\frac{x_m - x_1}{r_{m1}} + \frac{i_2}{\pi r_{m2}}\cdot\frac{x_m - x_2}{\pi r_{m2}} + \text{atd.} \end{aligned}\right\} \quad (67^d)$$

Pomocí snadné interpretace schopných rovnic (67^d) jest každý problém o diskretních tenkých válcích vírových řešitelným; při třech vystačí se s všeobecnými theoremy. Budiž ještě upozorněno, že se P_m z T nalézti dá derivací dle i_m.

Applikace. U *dvou* tenkých válců vírových padne těžiště, do nějž počátek souřadnic klademe, do spojky válců, a jelikož v klidu setrvá, redukuje se pohyb na prosté tvoření kolem těžiště, bude tedy $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt}$. Z definice těžiště jde $i_1 r_1 = i_2 r_2$, z (66):

$$\pi\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{i_1 i_2}{i_1 r_1^2 + i_2 r_2^2}.$$

Je-li $i_1 = i_2$, jest $r_1 = r_2$, $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{i_1}{2\pi r_1^2}$. Je-li $i_1 = -i_2$, padne těžiště do nekonečna, oba válce vírové točí se kol něho, to jest oba postupují kolmo na spojku jejich se stejnou rychlostí, kterou najdeme uvážíce, že rovnočarý vír průřezu kteréhokoli hledí body ve značné vzdálenosti d se nalézající kol sebe otáčeti rychlostí $\frac{i}{\pi d}$ (viz 53^a).

Jde-li o *jeden* válec v přítomnosti nekonečné jemu parallelné a klidné roviny tuhé, uvedeme úlohu supposicí zrcadlového obrazu válce s protivným směrem víření a vynecháním pevné roviny na případ předchozí. Vír pohybuje se pak parallelně k rovině rychlostí $i/2\pi d$, je-li d jeho distance od stěny. Je-li *jeden* vírový válec obsažen mezi dvěma k sobě kolmými

pevnými rovinami, můžeme si tyto odmysliti, představíce si oba víry předchozího případu v druhé rovině znova zrcadleny, tak že máme mimo daný vír ještě tři zrcadlové obrazy jeho. Položme počátek souřadnic do průseku obou tuhých rovin. Patrně jest $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$

$$i_2 = -i_1,\ \varphi_2 = 180^0 - \varphi_1,\ i_3 = i_1,\ \varphi_3 = 180 + \varphi_1,\ i_4 = -i_1,\ \varphi_4 = -\varphi_1.$$

(Pořádek vírových indexů i_1, $i_2 \ldots$ ať běží ve směru rostoucího φ.)

Z rovnice (66) máme $\dfrac{d\varphi_1}{dt} = -\dfrac{i_1}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{r_1^2}$.

Z konstance energie (67^α) plyne stálost výrazu: $\dfrac{r_{12} r_{23} r_{34} \cdot r_{41}}{r_{13} r_{24}}$, tedy bude $r_1 \sin 2\varphi = const$ *trajektorií dráhy válcem opsané.*

I jiné ještě úlohy lze řešiti; na př. pohyb vírového válce v přítomnosti klidného tuhého válce kruhového, pohyb tří válců vírových atd.

§ 62. ***Vrstvy vírové.*** Dosud jsme předpokládali, že vírová vlákna vyplňují *prostor* hustotou *konečnou*. Volme tuto nekonečně velikou, ale restringujme vírový prostor na velmi tenkou vrstvu o tloušťce δ a sice tak, že $\xi' = \delta\xi$, $\eta' = \delta\eta$, $\zeta' = \delta\zeta$ zůstává *konečným.* Povrchový element této *vrstvy vírové* $d\omega$, k němuž přísluší vlastně objemový element $d\omega\delta$, přispívá pak k vektorovým potenciálům tou měrou, jako by na něm rozestřena byla *plošná* hmota o hustotě konečné ξ', η', ζ'. Jest tedy $U = \int \frac{d\omega}{r} \xi'$ atd. Vírová vlákna mají k vrstvě vírové vždy směr tangenciálný a následkem toho musí, jak z pojmu víru samo již vychází, tangenciálná a k vírovému vláknu kolmá komponenta rychlosti po obou stranách vírové vrstvy býti rozpojitou. V které míře se to děje, dozvíme se, když do určitého místa vrstvy položíme počátek souřadnic 0, osu x do směru vírového vlákna, osu y tangenciálně a kolmo k němu, konečně osu z do normály vrstvy. Opíšeme-li kolem 0 na vrstvě vírové nekonečně malou v sobě uzavřenou křivku, skládá se u, v, w z částí u_2, v_2, w_2, jichž příčinou jsou víry *mimo* ni položené a tyto obnosy jsou zajisté spojité i při prostupu skrz vrstvu vírovou (při bodu 0), kdežto druhá část rychlostí u_1, v_1, w_1, pocházející od vírů $\xi' \gtrless 0$, $\eta' = \zeta' = 0$ uvnitř malé plochy, jest skrz $V_1 = W_1 = 0$, $U_1 \gtrless 0$

dle (7[a]) udána výrazy:

$$u_1 = \frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial z} = 0, \quad v_1 = \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

$$w_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} = - \frac{\partial U_1}{\partial y}.$$

Veličina U_1 jest identická s potenciálem plošné hmoty o hustotě $\frac{\xi'}{2\pi}$, tedy

$$v_{1_{(z+)}} - v_{1_{(z-)}} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{(z+)} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{(z-)} = - 4\pi \,.\, \frac{\xi'}{2\pi}.$$

Odtud jde, že *i celá* tangenciálná k vírovému vláknu kolmá komponenta rychlosti jest po obou stranách vrstvy rozpojitou s obnosem $-2\xi'$. Normálová komponenta w_1 jest skrz spojitost tangenciálných diff. kvocientů potenciálu U_1 patrně úkonem vždy spojitým a totéž platí o w.

Tím se stávají řešitelnými úlohy hydrodynamické, při nichž na jistých *daných* plochách panuje diskontinuita tangenciálné rychlosti. Je-li v jistém okamžiku obnos její dán, jest tím i intensita ξ', η', ζ' určena. Nastane-li na př. diskontinuita na povrchu v tekutině myšleného prstenu kruhového a klade-li se podmínka symmetrie kolem osy jeho, jsou povrchová vírová vlákna kruhy v sobě uzavřenými s touž osou symmetrie. Pohyb mimo prsten jest pak tak rozdělen, jako magnetická síla od proudů pocházející, protože také účinek vírových vláken povrchových lze analogisovati s účinkem proudů. Později dokážeme, že plochy diskontinuit jsou u skutečných viskosních tekutin útvary labilnými a zdá se, soudíme-li podle jednotlivých případů dosud řešených, že jimi jsou i u tekutin ideálných.

Kapitola IX.

Vodní vlny jsou deformace rovnovážné hladiny spůsobené příčinami rozličnými. Nevstupuje-li v činnost vítr jakožto pramen energie, spočívá mechanismus vlnění v střídavé záměně pohybové a potenciálné (gravitační a kapillárné) energie vodních částic. Případy mathematické analyse přístupné jsou dosud sporé a i tu nutno činiti předpoklady počet zjednodušující. V prvé řadě budeme se zabývati pohyby nevířivými při další podmínce, že úchylky z polohy rovnovážné jsou vesměs velmi malé. Potenciál rychlosti φ, jenž dle ustanovení při klidu tekutiny nullou býti má, bude pak malou veličinou řádu prvého a téhož řádu budou rychlosti $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, v, w. Mimo to chceme předpokládati, že jest nad tekutinou buď prostor prázdný aneb alespoň tak řídký plyn, že v něm tlak až na proměnlivou část hydrodynamickou za stálý považovati lze. Je-li tekutina v klidu a tlak nad ní během času neproměnlivý, bude veličina S v rovnicích [(20) kap. II.] na čase nezávislou; čítáme-li osu z vertikálně nahoru, bude potenciál tíže P v téže rovnici roven gz, kdež g jest accelerace tíže. Dvojmoc rychlosti: V^2 lze vedle $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ vynechati a následkem toho bude místo [(20) kap. II.]:

$$\frac{p}{\varrho} = S - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz \qquad (0)$$

Nekonečně tenká vrstva tekutiny poblíž hladiny se během času všelijak deformuje, tvoří však vždy hranici její. Určitá částice její jest tudíž vždy částí povrchovou a její tlak vždy roven stálému tlaku nad hladinou. Odtud jde:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w = 0 \qquad (1)$$

Dosadíme-li tu p z rovnice (0) a vynecháme-li malé veličiny řádu vyššího, přejde (1) v

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} g = 0 \qquad (2)$$

Do (2) nutno dosaditi za x, y, z souřadnice okamžité polohy částice povrchové.

Je-li rovinou xy klidná hladina vodní, bude z koordinata povrchové částice veličinou velmi malou a dostačí následkem toho v rovnici (2) dosaditi

$$z = 0.$$

§ 63. ***Vlnění ve stroužce Weberově.*** Pohyby dějí se tu parallelně k stěnám stroužky (to jest k rovině xz), v jest nullou. Nic nezávisí zde na souřadnici y, takže splniti jest místo *Laplace-ovy* rovnice jednodušší rovnici:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2^a}$$

A) ***Pohyb postupný.*** Supponujme za φ hodnotu

$$\varphi = Z . f\left(t - \frac{x}{\omega}\right),$$

kdež Z jen od z záviseti má. Z rovnice (2^a) najdeme:

$$\frac{\partial^2 Z}{dz^2} \cdot \frac{1}{Z} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{f''\left(t - \frac{x}{\omega}\right)}{f\left(t - \frac{x}{\omega}\right)}.$$

Levá strana závisí jen na z, pravá jen na t a x; odtud jde, že jsou obě rovny *stálé* veličině m'. Integrace dávala by při *záporném* m' pro $f\left(t - \frac{x}{\omega}\right)$ hodnotu

$$Ae^{\omega\sqrt{-m'}\left(t - \frac{x}{\omega}\right)} + Be^{-\omega\sqrt{-m'}\left(t - \frac{x}{\omega}\right)},$$

která by připouštěla na jedné z obou stran stroužky v nekonečnu hodnoty nekonečně veliké. Nutno tudíž položiti $m' = + m^2$. Odtud máme:

$$f\left(t - \frac{x}{\omega}\right) = A_1 \cos (m\omega t - mx) + B_1 \sin (m\omega t - mx), \tag{2^b}$$

pak:

$$Z = A_2 e^{mz} + B_2 e^{-mz}$$

Z rovnice (2^b) usuzujeme, že jen z nekonečna do nekonečna sahající sled vln sinových, časově a prostorově periodických,

se se stálou rychlostí ω rozšiřovati může. Patrně jest, označíme-li periodu časovou, potažmo délkovou, písmeny τ a λ:

$$m\omega = \frac{2\pi}{\tau} = n; \; m = \frac{n}{\omega} = \frac{2\pi}{\tau\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2^c)$$

(λ zove se délkou vlny.) Podmínka $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ na dně stroužky $z = -h$ vede ku $\frac{dZ}{dz} = 0$ pro $z = -h$ a tím se redukuje Z na tvar:

$$Z = A\,(e^{m(z+h)} + e^{-m(z+h)}).$$

Výraz pro φ lze též psáti ve formě:

$$\varphi = A \cos(mx - nt + \vartheta) \,.\, (e^{m(z+h)} + e^{-m(z+h)}), \qquad (3)$$

kdež A i ϑ konstanty označují. Dosazením do (2) a substitucí $z = 0$ najdeme:

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \cdot \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}; \; mh = \frac{2\pi h}{\lambda}, \qquad (4)$$

tedy vzorec, jenž k dané délce vlny λ dovoluje nalézti příslušnou rychlost postupu ω. Při nekonečné hloubce jest

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{m}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Vlnám proti hloubce nad míru dlouhým (v mělké vodě) odpovídá, jak rozvojem exponencielly v (4) seznáme, rychlost $\sqrt{gh}$.

B) ***Stojaté vlny.*** Při $x = 0$ a $x = l$ budiž stroužka omezena pevnou vertikálnou stěnou, na níž býti musí $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$. Stojatému kmitání odpovídá integrál:

$$\varphi = (A \sin nt + B \cos nt)\,(C \sin mx + D \cos mx)\,(e^{m(z+h)} + e^{-m(z+h)}) \qquad (5)$$

Laplace-ově rovnici a podmínce na dně jest tím vyhověno. Podmínka $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ pro $x = 0$ a $x = l$ vede ku $C = 0$, potažmo $\sin ml = 0$, neb $m = \frac{k\pi}{l}$, kdež $k = 1, 2 \ldots$ Určitému k odpovídá parciálný stojatý pohyb, jenž na pevných stěnách a jiných o $\frac{l}{k}$

od sebe a od stěn odlehlých vertikálných rovinách nemá komponenty vodorovné. Dosazení do (2) z rovnice (5) vede ku:

$$\frac{4\pi^2}{\tau^2} = n^2 = gm \cdot \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}} \tag{6}$$

Z (6) najdeme ke každému k pomocí $m = k\pi/l$ příslušnou periodu $\tau = \tau_k = \frac{2\pi}{n_k}$.

Položme nyní počátek souřadnic uprostřed mezi stěny, a zovme x-ovou souřadnici tomuto systému příslušnou x', tak že jest $x' = x - \frac{l}{2}$. Dosaďme tedy za $x \ldots x' + \frac{l}{2}$ do (5), připojme, aby parciálnost řešení na jevo vystoupila, ku n index k a položme

$$Z_k(z) = e^{\frac{k\pi}{l}(z+h)} + e^{-\frac{k\pi}{l}(z+h)} \tag{6$^\alpha$}$$

Tím bude místo (5) se zřetelem na $C = 0$ po vhodné kontrakci konstant:

$$\varphi_k = (A_k \sin n_k t + B_k \cos n_k t) \cos \frac{k\pi}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right) Z_k.$$

Vynechejme, odtud počínajíc, čárku nad x. Nejvšeobecnějším řešením jest výraz superposicí jednotlivých řešení vzniklý, tedy:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin n_k t + B_k \cos n_k t)\, Z_k(z) \cdot \cos \frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{l}{2}\right) \tag{6^a}$$

Konstanty A_k, B_k lze určiti pomocí *Fourierova* theoremu z podmínek udaných v čase $t = 0$. Předešleme však následující úvahy. Na počátku § (43.) bylo již uvedeno, že okamžitou úchylku částice z polohy rovnovážné, zde ξ', η', ζ' zvanou, lze považovati za úkon *okamžité* posice její x, y, z a času t, při čemž argumenty x, y, z, t jsou na sobě nezávislé. Rychlost částice $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{D\xi'}{Dt} \ldots$ dá se s vynecháním veličin vyššího řádu vyjádřiti vzorcem: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t}$.

Z (6^a) obdržíme takto:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\xi'}{\partial t}&=-\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\sin n_k t+B_k\cos n_k t)\\&\quad\times\frac{k\pi}{l}Z_k(z)\sin\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)\\\frac{\partial\zeta'}{\partial t}&=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\sin n_k t+B_k\cos n_k t)\\&\quad\times\cos\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)\frac{dZ_k}{dz}\end{aligned}\right\}\qquad(6^b)$$

Integrace dle t vede ku:

$$\xi'=-\sum_{k=1}^{\infty}(B_k\sin n_k t-A_k\cos n_k t)\frac{k\pi}{l n_k}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)Z_k(z)\qquad(6^\beta)$$

$$\zeta'=\sum_{k=1}^{\infty}(B_k\sin n_k t-A_k\cos n_k t)\frac{1}{n_k}\cdot\cos\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)\frac{dZ_k(z)}{dz}\qquad(6^c)$$

Integrační konstanty nepřipojujeme, protože ke klidu, $\varphi=0$, to jest dle (6^a) ku $A_k=0$, $B_k=0$ náleží $\xi'=\zeta'=0$.

Je-li na povrchu tekutiny $z=0$ ζ' a $\frac{\partial\zeta'}{\partial t}$ v čase $t=0$ předepsáno, tedy $\zeta'=f(x)$, $\frac{\partial\zeta'}{\partial t}=F(x)$, lze A_k i B_k nalézti dle *Fourierovy* věty.

C) ***Dráhy částic.*** Odpovídá-li stojaté kmitání jen *jedné* z možných period, podržíme v ($6^{\beta c}$) ze součtů pouze *člen jeden.* Odtud jde se zřetelem na (6^α):

$$\frac{\zeta'}{\xi'}=-cotg\,\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{e^{\frac{k\pi(z+h)}{l}}-e^{-\frac{k\pi(z+h)}{l}}}{e^{\frac{k\pi(z+h)}{l}}+e^{-\frac{k\pi(z+h)}{l}}}.$$

Pohyb každé částice děje se pak na přímce, jejížto sklon k horizontu závisí od posice její. Jinak při pohybu postupném. Z rovnic (3) najdeme podobným spůsobem jako nahoře:

$$\xi'=-\frac{m}{n}A\left(e^{m(z+h)}+e^{-m(z+h)}\right)\cos(mx-nt+\vartheta),$$

$$\zeta'=-\frac{m}{n}A\left(e^{m(z-h)}+e^{-m(z+h)}\right)\sin(mx-nt+\vartheta).$$

Dráha částic jest elliptická s osami úměrnými ku $e^{m(z+h)}\pm e^{-m(z+h)}$.

Na dně ($z=-h$) přejde ellipsa v přímku, při velmi značných hloubkách jest v konečné distanci od povrchu dráha ta kruhem.

Uzavřenost drah v případě prvém poukazuje k tomu, že pohyb částic může býti považován též za vířivý vzdor tomu, že jsme vyšli původně z pohybu potenciálového. Jest to následek supposice, že pohyby mají býti infinitesimálně malými. Následkem toho obdržíme, i když podmínku nevířivosti a priori nezavedeme, z rovnic (3) kap. II. po vynechání členů druhého

řádu $\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,$

jimž hoví: $u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; w=\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, kdež $\varphi=-\frac{p}{\varrho}-gz+S$.

Potenciálové pohyby konečné studoval ponejprv *Stokes.*

§ **64.** ***Postup vln tvaru libovolného. Fourierovy integrály.*** Dosadíce do (6^b) a (6^c) $t=0$, pak $z=0$, máme:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \zeta'}{\partial t}_{(t=0)}&=F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(\frac{dZ_k}{dz}\right)_{z=0}\cos\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)\\ \zeta'_{(t=0)}&=f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{A_k}{n_k}\left(\frac{dZ_k}{dz}\right)_{z=0}\cos\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad (6^d)$$

Obě strany rovnic násobíme na $\cos\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)dx$ a integrujeme

od $x=-\frac{l}{2}$ do $\frac{l}{2}$. Pomocí vztahu:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)\cos\frac{k'\pi}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)dx=0$$

pro $k \gtrless k'$, a $=\frac{l}{2}$ pro $k=k'$, najdeme, zavedouce za integrační proměnnou x značku ξ:

$$B_k\left(\frac{dZ_k}{dz}\right)_{z=0}=\frac{2}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}d\xi\, F(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\left(\xi+\frac{l}{2}\right)$$

$$-\frac{A_k}{n_k}\left(\frac{dZ_k}{dz}\right)_{z=0}=\frac{2}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}d\xi\, f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\left(\xi+\frac{l}{2}\right).$$

Tedy dle (6^c):

$$\zeta' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\xi \left(\cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x) + (-1)^k \cos \frac{k\pi}{l} (\xi + x) \right) S$$

$$\times \left(F(\xi) \frac{\sin n_k t}{n_k} + f(\xi) \cos n_k t \right),$$

kdež jest: $$S = \frac{e^{\frac{k\pi}{l}(\zeta + h)} - e^{-\frac{k\pi}{l}(\zeta + h)}}{e^{\frac{k\pi}{l} h} - e^{-\frac{k\pi}{l} h}} = \frac{\frac{dZ_k}{dz}}{\left(\frac{dZ_k}{dz}\right)_{z=0}}.$$

Je-li l nekonečně veliké, promění se součet dle k v integrály a sice tři. Píšeme-li na okamžik: $S.(F(\xi)..) = \Pi$, máme:

$$\zeta' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\xi \cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x) \Pi$$

$$+ \Sigma_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\xi \cos \frac{k\pi}{l} (\xi + x) \Pi - \Sigma_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\xi \cos \frac{k\pi}{l} (\xi + x) \Pi.$$

Součet Σ_1 vztahuje se ke všem sudým k, Σ_2 ke všem lichým.

Zaveďme dle dřívějšího: $\frac{k\pi}{l} = m$; Π jest pak úkonem argumentu m, neboť n_k, místo kteréhož n psáti chceme, závisí dle (6) od m.

V součtu Σ_1 a Σ_2 roste k vždy o *2*; příslušný vzrost veličiny m jest tudíž roven nekonečně malé veličině: $dm = \frac{2\pi}{l}$.

V součtu $\sum_{k=1}^{\infty}$ roste k o *jednu*, tedy $dm = \frac{\pi}{l}$. Lze pak psáti $(1/l) = (dm/2\pi)$, potažmo $(1/l) = (dm/\pi.)$ Tím bude*)

$$\zeta' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cos m (\xi - x) \Pi$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cos m (\xi + x) \Pi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cos m (\xi + x) \Pi,$$

---

*) V argumentu $m = \frac{k\pi}{l}$ značí l nad míru velikou délku, k jde do absolutního nekonečna, m jest tudíž pro $k = \infty$ též nekonečným.

a jelikož se druhý a třetí integrál ruší, bude:

$$\zeta' = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dm \int\limits_{-\infty}^\infty d\xi \cos m(\xi - x) \times$$
$$\left(F(\xi)\frac{\sin nt}{n} + f(\xi)\cos nt\right)\frac{e^{m(z+h)} - e^{-m(z+h)}}{e^{mh} - e^{mh}}. \qquad (7)$$

Derivací dle t najdeme $\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, a integrací dle $z \ldots \varphi$ samo. Případ nekonečně velikého l vztahuje se ke stroužce Weberově, která ve směru $\pm$ osy x-ové sáhá do nekonečna.

Položíme-li $z = 0$, máme pro tvar povrchu v čase t vzorec:

$$\zeta'_{(z=0)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dm \int\limits_{-\infty}^\infty d\xi \cos m(\xi - x)\left(F(\xi)\frac{\sin nt}{n} + f(\xi)\cos nt\right) \qquad (7^a)$$

V čase $t = 0$ jest ale $\zeta' = f(x)$. Odtud jde *Fourierův* theorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dm \int\limits_{-\infty}^\infty d\xi \cos m(\xi - x) f(\xi)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty dm \int\limits_{-\infty}^\infty d\xi \cos m(\xi - x) f(\xi) \qquad (8)$$

Byl-li povrch v čase $t = 0$ bez udělení rychlosti jen deformován, tedy $F(\xi) = 0$, máme

$$\zeta'_{(z=0)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dm \int\limits_{-\infty}^\infty d\xi \cos m(\xi - x) f(\xi)\cos nt. \qquad (9)$$

Vzorec (9) týkající se *tvaru* hladiny míníme diskutovati ve dvou krajních případech, jde-li o tekutinu extremně mělkou a extremně hlubokou.

§ 65. ***Pohyb dlouhých vln po povrchu tekutiny mělké.*** Rozměry oblasti, ve které povrch deformován byl, buďtež velmi značné proti hloubce tekutiny. Považujeme-li je za konečné (vhodně volíce délkovou jednotku), bude měrné číslo hloubky h nekonečně malým. Ve vzorci (9) jde proměnná m od nully do nekonečna, ale proměnná ξ jest konečnou, protože mimo *konečnou* oblast deformovanou, to jest mimo určité *konečné* ξ, jest $f(\xi) = 0$. Rozdělme tedy v rovn. (9) integraci dle m na dvě: od 0 do m_1 a od m_1 do ∞ a ustanovme, že m_1 má býti číslo nad míru veliké

ale jen tak, že $m_1 h$ jest pořád ještě velmi malým. (Tuto podmínku splňuje na př. $m_1 = \frac{1}{\sqrt{h}}$). V prvém intervallu $m \leqq m_1$ bude dle (6) dovoleno položiti $n = \sqrt{ghm^2}$; v intervallu $m_1 \ldots \infty$ učiníme, ač neprávem, totéž, ale dokážeme, že se tím dopouštíme chyby jen nepatrné, neboť integrál v (9) jdoucí od m_1 do ∞ jest následkem okolnosti, že se v (9) jen konečná ξ vyskytují (x považujeme vůbec za konečné), i v nejnepříznivějším případu veličinou o řádu $\frac{1}{m_1^2}$ vůči celkové hodnotě integrálu.

Při tomto ustanovení bude místo (9):

$$\zeta'_{(z=0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dm \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos m (\xi - x + \sqrt{gh} \,.\, t)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dm \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos m (\xi - x - \sqrt{gh} \,.\, t).$$

Dle (8) máme tudíž:

$$\zeta'_{(z=0)} = \tfrac{1}{2} f(x + t\sqrt{gh}) + \tfrac{1}{2} f(x - t \,.\, \sqrt{gh})$$

Tato rovnice vypovídá, že se původní deformace rozdělí na dvě parciálné deformace výšky poloviční, které na pravo a na levo pokračují rychlostí $\sqrt{gh}$,*) aniž by tvar svůj měnily.

§ 66. ***Úvahy analytické.*** Zbývá dokázati, že zmíněný integrál od m_1 *do* ∞ jest veličinou vůči celku velmi malou. Za tím účelem obracíme se k následující větě analytické. Budiž $F(\xi)$ úkonem, jenž jest v obvodu od a do b spojitým i konečným; tedy jest i $F'(\xi)$ konečným. Pak jest dovoleno, v integrálu:

$$J = \int_a^b F(\xi)\, d\xi \cos m\xi$$

provésti integraci per partes, tak že bude:

$$J = \Big/_{a}^{b} \frac{1}{m} \sin m\xi \, F(\xi) - \frac{1}{m}\int_a^b \sin m\xi \,.\, F'(\xi).$$

---

*) Stran bližšího viz Seydler. K. III. sv. kapitolu o šíření se vln.

Je-li i $F''(\xi)$ konečným, lze per partes integrovati dále, což vede ku

$$\int_a^b d\xi \cos m\xi \left(F(\xi) + \frac{1}{m^2} F''(\xi)\right) = \Big/_a^b \frac{\sin m\xi}{m} F(\xi) + \frac{1}{m^2}\Big/_a^b \cos m\xi F'(\xi) \quad (9^a)$$

Za těchto předpokladů jest limite $m = \infty$ až na veličiny vyššího řádu

$$\int_a^b d\xi \cos m\xi \, F(\xi) = \frac{1}{m}\Big/_a^b \sin m\xi \, F(\xi) \qquad (10)$$

Podobně bude:

$$\int_a^b d\xi \sin m\xi \, F(\xi) = -\frac{1}{m}\Big/_a^b \cos m\xi \, F(\xi) \qquad (11)$$

Je-li sice $F'(\xi)$ konečné, za to však $F''(\xi)$ v některém místě $c = \xi$ nekonečně veliké, t. j. změní-li tangenta křivky $F(\xi)$ náhle svůj směr, obdržíme rozvodem hranic:

$$J_1 = \int_a^b d\xi \sin m\xi \, F'(\xi) = \int_a^c \sin m\xi \, d\xi \, F'(\xi) + \int_c^b \sin m\xi \, d\xi \, F'(\xi).$$

Mezi ac a cb jest $F''(\xi)$ konečné, tudíž J_1 opět jen veličinou o řádu $\frac{1}{m}$, tak že rovnice (10) (11) v platnosti zůstávají, je-li jen $F(\xi)$ a $F'(\xi)$ konečné. Je-li $F'(\xi)$ mezi a a b nekonečným v bodě c, to jest má-li křivka $F(\xi)$ zde vzestup kolmý k abscissové ose, tak že ordinata se při $\xi = c$ limite $\alpha = 0$ změní z $F(c - \alpha)$ na $F(c + \alpha)$, můžeme v integrálu: $J = \int_a^b F(\xi) \, d\xi \cos m\xi$ integraci rozděliti na dvě: od a do c, a od c do b a na každou z nich applikovati rovnice (10) (11). Na každý spůsob vidíme, že, je-li jen $F(\xi)$ v mezích a, b konečným, integrál J, v němž za $\cos m\xi$ i $\sin m\xi$ dosaditi lze, jest veličinou o řádu $\frac{1}{m}$.

Pomocí této úvahy můžeme, vracejíce se k paragrafu předchozímu, je-li m_1 nad míru velikým a $f(\xi)$ jen v mezích $\alpha < \xi < \beta$ od nully rozdílným, položiti:

$$K = \int_{m_1}^\infty dm \cos nt \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \, d\xi \cos m(\xi - x)$$

$$= \int_{m_1}^\infty dm \cos nt \int_\alpha^\beta f(\xi) \, d\xi \cos m(\xi - x)$$

a dle (9^a):

$$K = \int_{m_1}^{\infty} dm \frac{\cos nt}{m} \Big/_{\alpha}^{\beta} \sin m(\xi - x) f(\xi) + \int_{m_1}^{\infty} dm \frac{\cos nt}{m^2} \Big/_{\alpha}^{\beta} f'(\xi) \cos m\xi.$$

Při tom se $f(\xi)$ i $f'(\xi)$ předpokládalo konečným. Vzestup křivky $f(\xi)$ není pak nikde, tudíž ani při $\xi = \alpha$ ani $\xi = \beta$ kolmým, a následkem toho $f(\alpha) = f(\beta) = 0$; jest tedy integrál K veličinou o řádu $f'(\beta) \int_{m_1}^{\infty} \frac{dm \cos nt \cos m\beta}{m^2}$ tedy dle vět (10, 11) veličinou o řádu $\frac{1}{m_1^3}$; neboť v posledním integrálu jest $m > m_1$ a m_1 velmi značné. Je-li však vzestup funkce $f(\xi)$ tedy $f'(\xi)$ nekonečně velikým při $\xi = c$, rozdělíme integraci dle ξ ve vzorci pro K na dvě: od α do c a od c do β, applikujeme větu (10) na každý z obou integrálů a najdeme, je-li $f(\alpha) = f(\beta) = 0$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)\, d\xi \cos m(\xi - x) = \frac{\big(f(c-\varepsilon) - f(c+\varepsilon)\big) \sin m(c - x);}{m} \; \lim \varepsilon = 0.$$

Jest tedy integrál K veličinou aspoň o řádu $\frac{1}{m_1^2}$, jak již dříve uvedeno bylo.

Podotkněme ještě, že se pomocí (10) a (11) *Fourierův* theorem (8) přímo verifikovati dá, nahradíme-li integraci dle m, jdoucí od 0 do ∞, integrací od 0 do nekonečně velikého M, čímž se provedení její umožní. Takto se dá dokázati, že, je-li $f(x)$ všude *spojité* a konečné, že pravá strana v (8) se skutečně rovná $f(x)$. Nastane-li v jistém místě $x = c$ rozpojitost úkonu $f(x)$, tak že témuž $c = x$, náleží *dvojí* hodnota f, repraesentuje pravá strana střední hodnotu jejich.

§ 67. ***Vlny při nekonečné hloubce.*** Druhý zajímavý případ týká se vlnění, jež vznikne opět prostou deformací hladiny u tekutiny však nekonečně hluboké, tak že dle (6) klásti lze $n^2 = gm$; zavedeme-li místo proměnné $m \ldots n$, máme místo (9)

$$\zeta' = \frac{2}{\pi g} \int_0^{\infty} n\, dn \cos nt \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \frac{n^2}{g} (\xi - x)\, d\xi.$$

Za účelem zjednodušiti úlohu supponujme, že $f(\xi)$ jest stálé a $= \zeta_0$ v obvodu $-\beta$ a $+\beta$, a ostatně nullou. Po provedení

integrace dle ξ a po derivaci dle t obdržíme:

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = -\frac{2\zeta_0}{\pi}\int_0^\infty dn \sin nt \Big/_{\xi=-\beta}^{\xi=\beta} \sin\frac{n^2}{g}(\xi - x)$$

neb

$$-\frac{\pi}{\zeta_0}\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = \Big/_{\xi=-\beta}^{\xi=\beta}\left\{\int_0^\infty dn \cos\left(\frac{n^2(\xi - x)}{g} - nt\right)\right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \cos\left(\frac{n^2(\xi - x)}{g} + nt\right)dn\right\} \qquad (11^a)$$

Tyto výrazy dají se redukovati na tak zv. integrály *Fresnelovy*. Jednejž se předně o body položené *mimo* původní deformaci povrchovou: $x > \beta$; pak jest $x - \xi$ kladné.

Dále máme:

$$\cos\left(\frac{n^2(\xi - x)}{g} - nt\right) = \cos\left(\frac{(x-\xi)n^2}{g} + nt\right) = \cos\left((\lambda n + \mu)^2 - \mu^2\right)$$

(při zkráceném označení: $\lambda^2 = \frac{x - \xi}{g}$, $\mu = \frac{t}{2\lambda}$). Tím bude:

$$\int_0^\infty dn \cos\left(\frac{n^2(\xi - x)}{g} - nt\right) = \int_0^\infty dn \cos\left[(\lambda n + \mu)^2 - \mu^2\right]$$

a přejde, položí-li se: $\lambda n + \mu = \sigma$, ve výraz:

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\frac{t}{2\lambda}}^\infty d\sigma \cos\left(\sigma^2 - \frac{t^2}{4\lambda^2}\right).$$

Z prvého integrálu v (11^a) najdeme druhý, kladouce za t $-t$; jest tedy

$$-\frac{\pi}{\zeta_0}\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = \Big/_{\xi=-\beta}^{\xi=\beta}\frac{1}{\lambda}\left[\int_{\frac{t}{2\lambda}}^\infty d\sigma \cos\left(\sigma^2 - \frac{t^2}{4\lambda^2}\right) - \int_{-\frac{t}{2\lambda}}^\infty d\sigma \cos\left(\sigma^2 - \frac{t^2}{4\lambda^2}\right)\right] \quad (12)$$

neb

$$\frac{\pi}{2\zeta_0}\cdot\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = \Big/_{\xi=-\beta}^{\xi=\beta}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{t}{2\lambda}} d\sigma \cos\left(\sigma^2 - \frac{t^2}{4\lambda^2}\right)\ldots \text{(pro } x > \beta) \quad (12^a)$$

neb:
$$\frac{\pi}{2\zeta_0}\frac{\partial\zeta'}{\partial t}=\sqrt{\frac{g}{x-\beta}}\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\beta}}} d\sigma\ cos\left(\sigma^2-\frac{t^2 g}{4(x-\beta)}\right)$$
$$-\sqrt{\frac{g}{x+\beta}}\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x+\beta}}} d\sigma\ cos\left(\sigma^2-\frac{t^2}{4(x+\beta)}\right) \qquad (12^b)$$

Pro body uvnitř původní deformace jest $x-\beta$ záporné.

Podobná transformace, neb i dosazení hodnoty $i\sqrt{\beta-x}$ za $\sqrt{x-\beta}$ do (12[b]) dává po transformaci prvého integrálu:

$$\frac{\pi}{2\zeta_0}\frac{\partial\zeta'}{\partial t}=-\sqrt{\frac{g}{\beta-x}}\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{\beta-x}}} d\sigma\ cos\left(\sigma^2-\frac{t^2 g}{4(\beta-x)}\right)$$
$$-\sqrt{\frac{g}{\beta+x}}\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x+\beta}}} d\sigma\ cos\left(\sigma^2-\frac{t^2}{4(x+\beta)}\right) \qquad (13)$$

Integrace rovnic (12[b]), (13) dle t jest snadná.

Pro $x>\beta$ obdržíme ze vzorce (12[a]):

$$\frac{\pi}{2\zeta_0}\frac{\partial\zeta'}{\partial t}=\Big/_{\xi=-\beta}^{\xi=\beta}\left[\frac{1}{\lambda}\cos\frac{t^2}{4\lambda^2}\int_0^{\frac{t}{2\lambda}} d\sigma\cos\sigma^2+\frac{1}{\lambda}\sin\frac{t^2}{4\lambda^2}\int_0^{\frac{t}{2\lambda}} d\sigma\sin\sigma^2\right]$$

a odtud integrací:

$$\frac{\pi}{2\zeta_0}\zeta'=\Big/_{\xi=-\beta}^{\xi=\beta}\left[\left(\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\xi}}} d\sigma\ cos\ \sigma^2\right)^2+\left(\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\xi}}} d\sigma\ sin\ \sigma^2\right)^2\right] \quad (\text{pro } x>\beta) \quad (14)$$

Integrační konstanta se nepřipojí, protože v obvodu $x>\beta$ pro $t=0$ jest $\zeta'=0$.

Podobná procedura s rovnicí (13) dává pro vnitřní prostor $-\beta<x<\beta$, jestli integrační konstantu upravíme dle podmínky: $\zeta'=\zeta_0$ při $t=0$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2\zeta_0}(\zeta'-\zeta_0)=-(J_1^2+J_2^2+J_3^2+J_4^2),\\
\text{kdež}\quad &J_1=\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{\beta-x}}} d\sigma\cos\sigma^2,\quad J_2=\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{\beta-x}}} d\sigma.\sin\sigma^2,\\
&J_3=\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x+\beta}}} d\sigma\cos\sigma^2,\quad J_4=\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x+\beta}}} d\sigma\sin\sigma^2
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Při témže označení máme pro: $x > \beta$ místo (14)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\pi\zeta'}{2\zeta_0}=J_1'^2+J_2'^2-J_3^2-J_4^2,\\
\text{kdež}\quad &J'_1=\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\beta}}} d\sigma\cos\sigma^2,\quad J'_2=\int_0^{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\beta}}} d\sigma.\sin\sigma^2
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Fresnelovy integrály. Diskusse vzorců (15, 16) vyžaduje bližších úvah o *Fresnelových* integrálech, o nichž zde jen stručně pojednáme poukazujíce stran bližšího na díla optická (*Verdet* I, *Kirchoff*).

Budiž $K_1=\int_{-\infty}^{\infty}dx\sin x^2.e^{-ax^2}=\int_{-\infty}^{\infty}dy\sin y^2 e^{-ay^2}$;

$$K_2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\cos x^2.e^{-ax^2}=\int_{-\infty}^{\infty}dy\cos y^2.e^{-ay^2}$$

a veličina a číslem kladným.

Pak jest:

$$K_2K_2-K_1K_1=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{-a(y^2+x^2)}\cos(x^2+y^2)=M_1,$$

$$K_1K_2+K_1K_2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy.e^{-a(y^2+x^2)}\sin(x^2+y^2)=M_2.$$

Po zavedení polárních koordinat jest:

$$M_1=2\pi\int_0^{\infty}r\,dr\,e^{-ar^2}\cos r^2=\pi\int_0^{\infty}d\zeta e^{-a\zeta}\cos\zeta=\frac{\pi a}{1+a^2},$$

$$M_2=\pi\int_0^{\infty}d\zeta e^{-a\zeta}\sin\zeta=\frac{\pi}{1+a^2}.$$

Položí-li se $a = 0$, shledá se $K_1 = K_2$ a

$$\int_0^\infty dx \sin x^2 = \int_0^\infty dx \, . \cos x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \tag{17}$$

což jsou úplné integrály Fresnelovy. Integrály od nully do jiné meze se zovou neúplnými a jsou úkony této meze. Položme:

$$f_1(\omega) = \int_0^\omega dx \sin x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \int_\omega^\infty dx \sin x^2;$$

$$f_2(\omega) = \int_0^\omega dx \cos x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \int_\omega^\infty dx \cos x^2.$$

Substituce $x^2 = \omega\zeta$ dává:

$$\int_\omega^\infty dx \sin x^2 = \frac{\sqrt{\omega}}{2}\int_\omega^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sin \omega\zeta; \quad \int_\omega^\infty dx \cos x^2 = \frac{\sqrt{\omega}}{2}\int_\omega^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \cos \omega\zeta.$$

Pro značná ω lze tyto vzorce redukovati dle (10) a (11). Tím obdržíme:

$$f_1(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{2\omega}\cos\omega^2, \quad f_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2\omega}\sin\omega^2 \text{*)} \tag{18}$$

Pohyb v centru poruchu $x = 0$. Zde jest dle (15) $J_1 = J_3$,

$J_2 = J_4$; $J_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{4\beta}}} d\sigma \cos\sigma^2$; $J_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{4\beta}}} d\sigma \sin\sigma^2$. 2β jest šířka původní deformace; pro poměrně malá t bude $\sqrt{\frac{gt^2}{4\beta}}$ již číslem velmi značným, je-li 2β mírné (třeba 1 *cm*). Integrály J_1 a J_2

*) Redukce dle (9a) dává

$$\int_\omega^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \cos\omega\zeta\left(1 + \frac{3}{4\omega^2\zeta^2}\right) = -\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}\left(\sin\omega^2 - \frac{1}{2\omega^2}\cos\omega^2\right);$$

jestliže $\frac{1}{4\omega^4}$ vedle 1 zanedbati lze, obdržíme zevrubněji:

$$f_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2\omega}\left(\sin\omega^2 - \frac{1}{2\omega^2}\cos\omega^2\right).$$

lze pak redukovati dle (18). Tím přejde (15) v

$$\frac{\pi}{4}\frac{\zeta'}{\zeta_0}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{\pi\beta}{2g}}\left(\cos\frac{gt^2}{4\beta}-\sin\frac{gt^2}{4\beta}\right)-\frac{\beta}{gt^2} \tag{19}$$

Vzorec (19) repraesentuje vibrační pohyb s periodou a amplitudou se neustále krátící.

Úchylka ζ' má maxima a minima při $\frac{\partial\zeta'}{\partial t}=0$. Klademe-li $\omega=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{\beta}}$, $x=0$, budou hodnoty t či ω maximominimům odpovídající určeny rovnicí (13) čili

$$\cos\omega^2\int_0^\omega d\sigma\cos\sigma^2+\sin\omega^2\int_0^\omega d\sigma\sin\sigma^2.=0, \tag{19a}$$

která se při značných ω redukuje dle (18) na

$$\cos\omega^2+\sin\omega^2=0,\ \text{neb}\ \omega^2=(4k-1)\frac{\pi}{4},\ k=1, 2, 3\ldots,$$

tak že (19) přejde pro časy maximominimové příbližně v:

$$\zeta'=\zeta_0\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{\sqrt{4k-1}},$$

časy samy jsou udány vzorcem:

$$t=\sqrt{4k-1}\sqrt{\frac{\pi\beta}{g}}.$$

[Nalezené kořeny ω nejsou, jde-li o malá k, tak veliké, aby při řešení transc. rovnice (19a) použito býti mohlo relace (18); bylo by tedy nutno, rovnici (19a) exaktněji řešiti.]

Pohyb v bodech od centra deformace značně vzdálených. Budiž x velmi značné proti β, ale velmi malé proti gt^2. Jest tím vytknuta partie povrchu, v níž, jak uvidíme, existuje časová i prostorová periodicita pohybu. Dlužno zde užiti vzorců (12b) a (16). S použitím rovnice (18) obdržíme, kladouce v (15) a (16)

$$\omega=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\beta}},\quad \omega'=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x+\beta}},$$

$$J'_1=\sqrt{\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega^2,\quad J'_2=\sqrt{\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{2\omega}\cos\omega^2,$$

$$J_3=\sqrt{\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{2\omega'}\sin\omega'^2,\quad J_4=\sqrt{\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{2\omega'}\cos\omega'^2,$$

tedy dle (16)

$$\frac{\pi}{2}\frac{\zeta'}{\zeta_0}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{\omega}\,(sin\,\omega^2-cos\,\omega^2)$$
$$-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{\omega'}\,(sin\,\omega'^2-cos\,\omega'^2)+\frac{1}{4\omega^2}-\frac{1}{4\omega'^2} \qquad (19^b)$$

Pro velmi malé β bude $\omega'=\omega\left((1-\frac{\beta}{x}\right)$; tím povstane z $19^{(b)}$

$$\frac{\zeta'}{\zeta_0}=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cdot\frac{1}{\omega}\left[sin\left(\omega^2-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{\omega}{\omega'}cos\frac{2\beta\omega^2}{x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\omega}{\omega'}cos\left(\omega^2-\frac{\pi}{4}\right)sin\frac{2\beta\omega^2}{x}\right]-\frac{\beta}{2\omega^2x} \qquad (19^c)$$

Čas, pro který v bodě x nastanou maxima a minima, jde z rovnice (12^b), položíme-li v ní $\frac{\partial\zeta'}{\partial t}=0$. Při hořejším označení a málo od sebe rozdílných ω (malém β) lze ji psáti ve formě

$$(\omega-\omega')\frac{d}{d\omega}\left[\omega\int_0^\omega d\sigma\,cos\,(\sigma^2-\omega^2)\right]=0$$

neb
$$\int_0^\omega d\sigma\,cos\,(\sigma^2-\omega^2)+\omega+2\omega^2\int_0^\omega sin\,(\sigma^2-\omega^2)\,d\omega=0 \qquad (20)$$

Ke každému kořenu ω rovnice (20) náleží maximominimový čas $t=2\omega\sqrt{\frac{x-\beta}{g}}=2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}$. Totéž, arciť seslabené maximum neb minimum vyskytuje se tudíž po době $2t$, $3t$ v distanci $4x$, $9x$. Rovnici (20) lze opět příbližně řešiti pro veliké ω, tedy rovnicí

$$\int_0^\infty sin\,(\sigma^2-\omega^2)\,d\omega=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,(cos^2\omega-sin^2\omega)=0, \qquad (20^a)$$

jíž vyhovuje $\omega^2=(4k+1)\frac{\pi}{4}$; $k=0, 1, 2, 3\ldots$

(Kořeny odpovídající malým k jsou arciť méně správné.) Exkurse minimomaximové jdou z (19^c), kterýžto vzorec přejde v

$$\zeta'=\frac{2\zeta_0}{\pi}\sqrt{\frac{1}{4k+1}}\cdot(-1)^k\,sin\,\frac{(4k+1)\pi\beta}{2x};\quad k=0, 1, 2\ldots$$

Sudým k odpovídají maxima, lichým minima.*) V oboru, kde x jest značným i proti gt^2, můžeme, protože horní meze v integrálech (15) a (16) jsou velmi malé, položiti

$$J'_1 = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x-\beta}},\ J'_2 = 0,\ J_3 = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x+\beta}},\ J_4 = 0$$

a dle (16)

$$\xi' = \zeta_0 \cdot \frac{\beta}{\pi}\frac{gt^2}{x^2}.$$

Maxim a minim tu patrně není.

§ 68. ***Vlnění ve dvou rozměrech povrchových.*** *Laplace-ově* rovnici pro potenciál rychlosti lze při všude stejné hloubce dna vyhověti integrálem $\varphi = Z(z)\Psi(t, x, y)$, kdež

$$Z(z) = e^{m(h+z)} + e^{-m(h+z)}$$

a při čemž Ψ hoví rovnici:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + m^2\Psi = 0 \tag{21}$$

Není-li hladina omezena, lze φ určiti z povrchových dat ζ' a $\frac{\partial\zeta'}{\partial t}$ v čase $t = 0$ a sice zvšeobecněním *Fourierovy* věty, plynoucím z (8)

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu'\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\, F(\xi, \eta)\cos\mu(x-\xi)\cos\mu'(y-\eta) \tag{22}$$

Aniž bychom počet provedli, udáváme výraz pro exkursy ζ' z polohy rovnovážné:

$$\zeta' = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu'\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\xi \cdot \frac{\partial Z}{\partial z}\cos\mu(\xi - x)\cos\mu'(\eta - y)$$
$$\left[F(\xi, \eta)\frac{\sin nt}{n} + f(\xi, \eta)\cos nt\right]\frac{1}{\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{z=0}} \tag{23}$$

V čase $t = 0$ jest na povrchu ($z = 0$) dle (23) a (22) skutečně:

$$\zeta' = f(x, y),\ \frac{\partial\zeta'}{\partial t} = F(x, y) \tag{23}$$

Integrujeme-li $\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ dle z, obdržíme pro φ podobný tvar

*) Patrně odpovídají horním a dolním obratům pohybu povrchového $\frac{\partial\zeta'}{\partial t} = 0$.

jako (23), místo $\frac{\partial Z}{\partial z}$ stojí tam Z. Rovnicím $\Delta\varphi = 0$ a (21) jest každým členem výrazu φ o sobě vyhověno, jestliže platí

$$\mu^2 + \mu'^2 = m^2 \tag{24}$$

Povrchové podmínce (2) se vyhoví, volíme-li n dle podmínky (6). Připomínáme, že rovnicí (24) není vyslovena závislost mezi μ a μ'. Obě veličiny jsou na sobě *nezávislé*, ku každému $\mu^2 + \mu'^2$ přísluší jisté m^2 a k němu dle (6) jisté n.

Při problémech o dvojrozměrovém se šíření vln odporučuje se zavedení polárních souřadnic a tím přicházíme k novému druhu funkcí důležitých, k úkonům *Besselovým*.

§ 69. ***O Besselových integrálech.*** Zavedením polárních souřadnic:

$$\psi,\ r,\ x = r\cos\psi,\ y = r\sin\psi \tag{25}$$

přejde (21) v:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r} + m^2\Psi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\psi^2} = 0 \tag{26}$$

Kladouce

$$\Psi = R(r)\cos k\psi\,(L\sin nt + M\cos nt) \tag{26^a}$$

najdeme ze (26):

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + Rm^2 - \frac{k^2}{r^2}R = 0, \tag{27}$$

tedy
$$\varphi = R(r)\cos k\psi\,(L\sin nt + M\cos nt)\,Z \tag{28}$$

Partikulárný integrál (28) odpovídá pohybům tekutiny, které v jistých vertikálných středem jdoucích rovinách nemají komponent k nim kolmých. Jsou to roviny, pro které jest $\sin k\psi = 0$. Je-li tekutina obsažena mezi dvěma koncentrickými válci, jest u, v, w, tudíž i φ, co do argumentu ψ periodickým s periodou 2π, musí tudíž k býti celé. Zmíněné roviny jsou pak od sebe vzdáleny o úhel $\frac{2\pi}{k}$.

Píšeme-li v (27) $R(r) = J_k(\varrho)$, kdež jest $\varrho = rm$, přejde (27) v

$$\frac{d^2J_k}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dJ_k}{d\varrho} + J_k\left(1 - \frac{k^2}{\varrho^2}\right) = 0 \tag{29}$$

Integrály rovnice (29) nazývají se *Besselovy úkony stupně k-tého*.

Partikulárný integrál (29) najdeme supponujíce za něj řadu:

$$J_k(\varrho) = \sum_0^\infty a_n \varrho^n \tag{30}$$

Dosazením do (29) nalezneme $a_n(n^2 - k^2) + a_{n-2} = 0$. Odtud jde, že nejnižší potence v řadě (30) jest k-tá. Provedení počtu dává pak, položíme-li $a_k = 1$,

$$J_k(\varrho) = \varrho^k \left(1 - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{k+1} + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \cdots \right) \tag{31}$$

Jinou formou pro (31) jest:

$$J_k(\varrho) = \frac{2^{k+1} . k!}{\pi . 1 . 3 \ldots (2k-1)} \cdot \varrho^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varrho \cos\varphi_1) \sin\varphi_1^{2k} . d\varphi_1 \tag{32}$$

Přesvědčíme se o tom rozvinouce $\cos(\varrho \cos\varphi_1)$ v řadu

$$1 - \frac{\varrho^2 \cos^2\varphi_1}{2!} \ldots \text{ pomocí}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi^{2m} \sin\varphi^{2k} d\varphi = \frac{\pi . 1 . 3 \ldots (2k-1)}{2 . k! \, 2^{k+m}} \cdot \frac{1 . 3 \ldots (2m-1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}.$$

Pro $\varrho = 0$ a $k > o$ jest $J_k(\varrho)$ nullou, pro konečná ϱ konečným; jaké jest při argumentech nekonečně velikých, dovíme se následovně. Kladouce v (32) $\cos\varphi_1 = 1 - u^2$ obdržíme:

$$J_k(\varrho) . \varrho^{-k} . \pi . \frac{1 . 3 \ldots (2k-1)}{k! \, 2^{k+2}} = \cos\varrho \int_0^1 du . u^{2k}(2-u^2)^{k-1/2} \cos(\varrho u^2) + \sin\varrho \int_0^1 du \, u^{2k}(2-u^2)^{k-1/2} \sin(\varrho u^2) = \cos\varrho \, H_1 + \sin\varrho \, H_2 \tag{33}$$

Vypočtěme: $H_1 + H_2 i = \int_0^1 du \, u^{2k} (2 - u^2)^{k-1/2} . e^{i\varrho u^2}$

$$= \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\varrho^k} \int_0^1 du \, (2 - u^2)^{k-1/2} \left(\cos(\varrho u^2) + i . \sin(\varrho u^2)\right).$$

Hodnotu integrálu za differenciačním symbolem lze pro značná ϱ takto vyšetřiti.

Integraci od 0 do 1 rozdělme za tím účelem od 0 do u_1 a od u_1 do 1. Je-li ϱ nad míru veliké, lze u_1 voliti tak malým, že u_1^2 vedle 2 zanedbati lze, ale zároveň tak, aby ϱu_1^2 bylo číslem velmi značným. (Klademe-li na př. $u_1 = \varrho^{-1/4}$, jsou obě podmínky splněny.)

Odtud jde $\int_0^{u_1} du\,(2-u^2)^{k-1/2} \cos(\varrho u^2) = \int_0^{u_1} du \,.\, 2^{k-1/2} \,.\, \cos(\varrho u^2)$

$$= 2^{k-1/2} \,.\, \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{u_1\sqrt{\varrho}} du \cos u^2$$

$$= \frac{2^{k-1/2}}{\sqrt{\varrho}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2u_1\sqrt{\varrho}} \sin u_1^2 \varrho \right) \text{ [dle (18)].}$$

V integrálu od u_1 do 1 klademe $u^2 = z$, tedy:

$$\int_{u_1}^1 du\,(2-u^2)^{k-1/2} \cos(\varrho u^2) = \frac{1}{2} \int_{u_1^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} (2-z)^{k-1/2} \cos \varrho z.$$

Úkon $\varphi(z) = \dfrac{(2-z)^{k-1/2}}{\sqrt{z}}$ jest v mezích u_1^2 a 1 spojitým, tudíž dle (9ᵃ)

$$\int_{u_1^2}^1 dz \,.\cos \varrho z \left(\varphi(z) + \frac{1}{\varrho^2} \varphi''(z) \right) = \Big/_{u_1^2}^{1} \left[\varphi(z) \frac{\sin \varrho z}{\varrho} + \frac{\varphi'(z) \cos \varrho z}{\varrho^2} \right].$$

Pro velmi malé z jest

$$\varphi(z) = z^{-1/2} \,.\, 2^{k-1/2}, \quad \varphi'(z) = -\tfrac{1}{2} \,.\, z^{-3/2} \,.\, 2^{k-1/2},$$
$$\varphi''(z) = \tfrac{3}{4} \,.\, z^{-5/2} \,.\, 2^{k-1/2}.$$

Pozorujeme tedy, že i při $z = u_1^2$ bude dovoleno $\dfrac{\varphi''(z)}{\varrho^2}$ vedle $\varphi(z)$ vynechati, protože dle ustanovení $u_1^2 \varrho$ jest číslem velmi značným.

Zanedbajíce tudíž členy řádu vyššího, máme pro integrál od u_1 do 1 hodnotu $- \dfrac{\sin u_1^2 \varrho \; 2^{k-1/2}}{2\varrho u_1}$, tedy:

$$\int_0^1 du\,(2-u^2)^{k-1/2} \cos \varrho u^2 = \frac{2^{k-3/2}}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

a stejně velikou hodnotu má druhý podobný integrál s faktorem $\sin \varrho u^2$ místo $\cos \varrho u^2$.

Odtud jde $H_1 + H_2 i = i^k (1+i) \frac{\sqrt{\pi}}{4} 1 . 3 \ldots (2k-1) \varrho^{-k-1/2}$.

Rovnice (33) redukuje se pak na

$$J_k(\varrho) = \pm \frac{2^k . k!}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}} \left(\cos\varrho + (-1)^k \sin\varrho \right) \qquad (33^b)$$

(Znamení + pro k čtyřmi dělitelná neb o jedno menší, znamení minus pro k o tvaru $2+4s$, neb $1+4s$, kdež s jest celé.)

Z (33^b) jde, že $J_k(\varrho)$ jest v nekonečnu nekonečně malým o řádu $\varrho^{-1/2}$.

Známe-li *jeden* integrál rovnice (29), nalezneme snadno integrál úplný $K_k(\varrho)$ vyhovující téže rovnici:

$$\frac{d^2 K_k}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dK_k}{d\varrho} + K_k\left(1 - \frac{k^2}{\varrho^2}\right) = 0 \qquad (34)$$

Substitucí: $K_k(\varrho) = J_k(\varrho) . S$, máme po dosazení do (34) se zřetelem na (29) a po označení derivací čárkami:

$$\frac{S''}{S'} + 2\frac{J'_k}{J_k} + \frac{1}{\varrho} = 0, \text{ tedy } S' = \frac{const}{(J_k)^2 \varrho} \text{ a}$$

$$K_k = const . J_k \int_\alpha^c \frac{d\varrho}{\varrho (J_k)^2}; \qquad (35)$$

α jest integrační konstantou, již považujeme za kladnou.

Rozvodem hranic od α do ∞ a od ∞ do ϱ obdržíme integrály dva, z nichž prvý jest konstantou konečnou, tak že psáti lze

$$K_k(\varrho) = A J_k(\varrho) + B J_k(\varrho) \int_\infty^\varrho \frac{d\sigma}{\sigma J_k(\sigma) J_k(\sigma)} \qquad (35')$$

Faktor u B jest druhým partikulárným integrálem rovnice (29).

Zoveme-li jej H_k, obdržíme differenciací vztah:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{H_k}{J_k}\right) = \frac{1}{\varrho (J_k)^2} \qquad (35^a)$$

Pro nekonečně malé ϱ jest dle (31) J_k veličinou o řádu ϱ^k, tedy $\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{H_k}{J_k}\right)$ o řádu $\frac{1}{\varrho^{2k+1}}$; integrace dí, že H_k jest veličinou o řádu $\frac{1}{\varrho^k}$ pro $k > 0$, a o řádu $\log\varrho$, je-li $k = 0$; na každý spůsob jest pro $\varrho = 0$ H_k nekonečně veliké.

Pro nekonečně veliké ϱ jest $J_k = f\varrho^{-1/2}(\cos\varrho \pm \sin\varrho)$, tedy dle (35ª) $\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{H_k}{J_k}\right)$ konečné a H_k samo nekonečně malým o řádu $\varrho^{-1/2}$.

Obraťme se ještě k případu $k = 0$. Výraz $\varphi = Z\cos(nt + \vartheta) J_0(\varrho)$ jest potenciálem možného pohybu, patrně symmetrického kol středu souřadnic.

Při *nekonečně* velikém $\varrho = mr$ jest až mu faktor

$$J_0(\varrho) = \varrho^{-1/2}(\cos\varrho + \sin\varrho),$$

$$\text{tedy } \varphi = \sqrt{\frac{1}{2mr}}\, Z\left[\cos\left(nt + \vartheta + mr - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(nt + \vartheta - mr + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

což odpovídá koexistenci *dvou* harmonických vln, šířících se se stálou rychlostí, jednak od středu, jinak k němu. Budiž podotknuto, že co *do povahy šíření se jest rozdíl mezi vlnami rovinnými a kruhovými*, jenž *teprva mizí při značném r*.

§ 70. ***Vlny stojaté.*** Budiž tekutina obsažena mezi dvěma klidnými svislými koncentrickými válci v poloměrech r_1, r_2, $(r_1 < r_2)$, tak že úkon $R(r)$ v (28) pro $r = r_1$ a $r = r_2$ musí splňovati podmínku $\frac{\partial R}{\partial r} = 0$. Použijeme pro $R(r)$ úplného integrálu $K_k(\varrho)$ v (35'), který obsahuje *dvě* konstanty A, B. Skrz $\varrho = mr$ musí pro $\varrho_1 = mr_1$ a $\varrho_2 = mr_2$ splněna býti podmínka $\frac{dK_k(\varrho)}{d\varrho} = 0$.

Eliminací konstant A, B najdeme pro určení veličiny m transcendentní rovnici o kořenech $m_{k_1}, m_{k_2} \ldots m_{ki} \ldots m_{kn} \ldots$ Ke každému kořenu m_{ki} přísluší z jedné z rovnic vypočítatelný poměr A/B a ke každému m_{ki} dle (6) jedno určité n_{ki}. Jednu z konstant A, B volme jedničkou; druhá jest pak ustanovena jakožto vypočítatelný úkon argumentu m_{ki}.

Úkon $K_k(\varrho) = K_k(rm)$, v němž $m = m_{ki}$ položeno a za nějž $R_{ki}(r)$ psáti budeme, neobsahuje pak žádné konstanty neurčité. Podobně značiž $Z_{ki} = e^{m_{ki}(z+h)} + e^{-m_{ki}(z+h)}$. Superposicí integrálů (28) obdržíme, připojivše ještě konstanty ψ_k ve výrazech $\cos k\psi$, úplný integrál:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k(\psi + \psi_k) \sum_{i=1}^{\infty} Z_{ki}(L_{ki}\sin n_{ki}t + M_{ki}\cos n_{ki}t) R_{ki}(r) \qquad (36)$$

Derivací dle z najdeme $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta'}{\partial t}$; integrací dle $t \ldots \zeta'$, verti-

kálnou komponentu úchylky z polohy rovnovážné, tedy:

$$\zeta' = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\psi+\psi_k) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{dZ_{ki}}{dz} \cdot \frac{1}{n_{ki}} R_{ki}(r)(M_{ki} \sin n_{ki} t - L_{ki} \cos n_{ki} t) \quad (37)$$

Tekutině klidné odpovídá dle ustanovení $\varphi=0$, tedy $M_{ki} = L_{ki} = 0$ a $\xi' = \zeta' = 0$. Z toho důvodu není v (37) připojen addiční na t nezávislý člen, jenž jest následkem integrace dle t. Substitucí:

$$A_{ki} = -\frac{L_{ki}}{n_{ki}} \frac{dZ_{ki}}{dz_{(z=0)}}, \quad B_{ki} = M_{ki} \cdot \frac{dZ_{ki}}{dz_{(z=0)}} \quad (38)$$

obdržíme pro povrch:

$$\zeta'_{(z=0)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \cos k(\psi + \psi_k) \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(A_{ki} \cos n_{ki} t + \frac{B_{ki}}{n_{ki}} \sin n_{ki} t \right) R_{ki}(r) \quad (39)$$

Je-li v čase $t = 0$ ζ' a $\frac{\partial \zeta'}{\partial t}$ předepsáno jakožto úkon posice, t. j. souřadnic r, ψ, lze se zřetelem na to, že obě funkce jsou co do argumentu ψ periodické o periodě 2π, položiti dle věty *Fourierovy*:

$$\zeta' = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(r) \cos k(\psi + \psi_k) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(r) \cos k(\psi + \psi'_k) \quad (40)$$

Veličiny $\zeta_k \cos k\psi_k$, $\zeta_k \sin k\psi_k$, tedy i ζ_k a ψ_k a podobně η_k a ψ'_k lze vypočítati jakožto úkony r a považovati je za veličiny dané. Dosadíme-li v (39) a v rovnici, která derivací dle t vznikne $t = 0$ a srovnáme-li výsledek s (40), shledáme, že jsou v čase $t = 0$ na hladině jen takové ζ' a $\frac{\partial \zeta'}{\partial t}$ přípustny, pro které platí $\psi_k = \psi'_k$. Další srovnání vede ku:

$$\zeta_k(r) = \sum_{i=1} A_{ki} R_{ki}(r); \quad \eta_k(r) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{ki} R_{ki}(r) \quad (41)$$

Neznámé konstanty A_{ki}, potažmo B_{ki} najdeme, násobíce obě strany rovnic (41) na $R_{ki}(r)\, r\, dr$ a integrujíce od r_1 do r^2 a sice pomocí vztahu:

$$\int_{r_1}^{r_2} \zeta_k(r) R_{ki}(r) \cdot r\, dr = A_{ki} \int_{r_1}^{r_2} r\, dr\, R_{ki} \cdot R_{ki}, \quad (42)$$

z druhé rovnice (41), v níž místo ζ_k, A_{ki} stojí η_k, B_{ki}, najde se B_{ki}.

Pomocí (38) se naleznou L_{ki} a M_{ki}, čímž úloha úplně řešena jest. Platnost rovnice (42) spočívá na theoremu:

$$S = \int_{r_1}^{r_2} r\, dr\, R_{ki}(r)\, R_{kj}(r) = 0 \quad \text{pro} \quad i \gtrless j, \tag{43}$$

který nám dokázati jest.

Dle rovnice (27) jest, zavedeme-li tu $m = m_{ki}$, $R = R_{ki}$:

$$\frac{d^2 R_{ki}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_{ki}}{dr} + R_{ki}\, m_{ki}^2 - \frac{k^2}{r^2} R_{ki} = 0.$$

Odtud násobením na $r\,dr\,R_{kj}$ a integrací od r_1 do r_2:

$$S \,.\, m_{ki}^2 = k^2 \int_{r_1}^{r_2} R_{ki}\, R_{kj} \frac{dr}{r} - \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR_{ki}}{dr}\right) . R_{kj}$$

neb:

$$S m_{ki}^2 = k^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} . R_{ki}\, R_{kj} + \int_{r_1}^{r_2} dr . \frac{dR_{ki}}{dr} . \frac{dR_{kj}}{dr} - \Big|_{r_1}^{r_2} R_{kj} \frac{dR_{ki}}{dr} r \tag{44}$$

Pišme v (44) i místo j. Odečtením nové rovnice od (44) jde:

$$S = \frac{\Big|_{r_1}^{r_2} \left(R_{ki} \frac{dR_{kj}}{dr} - R_{kj} \frac{dR_{ki}}{dr}\right) r}{m_{ki}^2 - m_{kj}^2}.$$

Tato relace platí pro jakákoli m_{ki}, m_{kj}. V našem případě jest $\frac{dR_{ki}}{dr}$ i $\frac{dR_{kj}}{dr}$ nullou pro $r = r_1$ i $r = r_2$. Je-li tedy $m_{ki} \gtrless m_{kj}$, bude $S = 0$, čímž vztah (43) dokázán jest. Pro $m_{ki} = m_{kj}$ má S neurčitý tvar $0:0$, který snadno vyčísliti lze, redukuje-li se $R_{ki}(r)$ na *jeden* partikulárný integrál *Besselův*, který po sloučení multiplikativné konstanty jeho s A_{ki}, B_{ki} (viz 39) jest úkonem jen argumentu $\varrho = m_{ki} . r$. V tomto případě ustanovme, že *pouze* m_{ki} jest kořenem zmíněné transcendentní rovnice, tak že jest jen $\frac{dR_{ki}}{dr} = 0$, pro $r = r_1$ a $r = r_2$; položme dále: $m_{kj} = m_{ki} + \delta$, kdež δ jest číslo nekonečně malé.

Se zřetelem na $R_{kj}(r) = K_k(r m_{kj})$ máme

$$\frac{dR_{kj}}{dr} = m_{kj}\, K'_k(r m_{kj}) = (m_{ki} + \delta)\big(K'_k(r m_{ki}) + \delta . r\, K''_k(r m_{ki})\big).$$

Se zřetelem na $\frac{dR_{ki}}{dr} = K'_k(rm_{ki}) = 0$ pro $r = r_1$ a $r = r_2$ bude

$$\frac{dR_{kj}}{dr} = K''_k(rm_{ki}) \,.\, \delta \,.\, r \,.\, m_{ki}$$

a

$$S = \int_{r_1}^{r_2} r\,dr\,\big(R_{ki}(r)\big)^2 = -\frac{1}{2}\Big/_{r_1}^{r_2} r^2 K_k(rm_{ki})\,K''_k(rm_{ki}) \quad (45)$$

Přihlížejíce ke vztahu (34) máme se zřetelem k tomu, že pro $\varrho = \varrho_1 = m_{ki}\,r_1$ a $\varrho = \varrho_2 = m_{ki}\,r_2$ K'_k se nulle rovná:

$$\int_{r_1}^{r_2} r\,dr\,R_{ki}^2(r) = \frac{1}{2}\Big/_{r_1}^{r_2} r^2 K_k^2(rm_{ki})\left(1 - \frac{k^2}{r^2 m_{ki}^2}\right) \quad (45^a)$$

Specialisace. Schází-li prostřední válec, $r_1 = 0$, smíme místo úplného integrálu K_k podržeti jen partikulárný $J_k(rm)$, protože podržení i druhého by vedlo pro $r = 0$ k nekonečně velikým hodnotám. Transcendentní rovnice, jíž určujeme kořeny m, jest pak

$$J'_k(z) = 0, \quad \text{kdež} \quad z = mr_2.$$

Jsou-li $z_1, z_2 \ldots z_i \ldots$ numerické hodnoty kořenů, bude $m_{ki} = \frac{z_i}{r_2}$.

Je-li radius zevnějšího válce r_2 nekonečně veliký, odpovídají konečným z_i nekonečně malé m_{ki} o řádu $\frac{1}{r_2}$. Dá se dokázati, že po sobě jdoucí kořeny z_i rychle rostou a jelikož pro poněkud větší z dle (33^b) položiti lze (až na lhostejný faktor)

$$J_k(z) = z^{-1/2}(\cos z \pm \sin z),$$

$$J'_k(z) = -z^{-1/2}(\sin z \mp \cos z) - \tfrac{1}{2} z^{-3/2}(\cos z \pm \sin z),$$

bude při značných z

$$J'_k(z) = -z^{-1/2}(\sin z \mp \cos z).$$

Znamení horní náleží lichým, dolní sudým k. Kořeny rovnice $J'_k(z) = 0$ jsou: $\frac{(4s+1)\pi}{4}$ neb $\frac{4s+3\pi}{4}$; rozdíl dvou po sobě jdoucích kořenů jest π, a následkem toho rozdíl dvou po sobě jdoucích m_{ki} roven $dm_{ki} = \frac{\pi}{r_2}$. Píšeme-li místo m_{ki} zkrátka m, redukuje se každá i řada, na př. ona v (39) na integrál od $m = 0$ do nekonečna.

Položme tedy v rovnicí (45) $r_1 = 0$,

$$K_k(r_2 m) = J_k(r_2 m) = \pm \frac{2^k k!}{\sqrt{\pi}\sqrt{r_2 m}} (\cos r_2 m \pm \sin r_2 m) \qquad \text{(dle 33)}$$

a současně $K''_k(r_2 m) = J''_k(r_2 m) = -J_k(r_2 m)$, což dle (34) neb (29) správným jest pro značné argumenty ϱ. Se zřetelem na $\sin r_2 m \mp \cos r_2 m = 0$ jest $(\cos r_2 m \pm \sin r_2 m)^2 = \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$.

Z rovnic (42) a (45ᵃ) jde pak:

$$A_{ki} = \frac{\pi}{r_2} m \frac{1}{(2^k \cdot k!)^2} \int_0^{r_2} \zeta_k(\sigma) J_k(\sigma m) \sigma \, d\sigma$$

a podobný výraz pro B_{ki}, v němž místo $\zeta_k(\sigma)$ stojí $\eta_k(\sigma)$.

Položme v (39) $\lim r_2 = \infty$, $\frac{\pi}{r_2} = dm$, $n_{ki} = n$, pak $R_{ki}(r) = J_k(r m_{ki}) = J_k(rm)$ a nahraďme součet dle i integrálem dle m. Tím obdržíme:

$$\zeta'_{(z=0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k(\psi + \psi_k) \int_{m=0}^{\infty} m \, dm \int_{\sigma=0}^{\infty} \left(\cos nt \, \zeta_k(\sigma) + \frac{\sin nt}{n} \eta_k(\sigma)\right)$$

$$\times \frac{J_k(rm)}{2^k \cdot k!} \frac{J_k(m\sigma)}{2^k \cdot k!} \sigma \, d\sigma, \qquad (46)$$

při čemž n jest úkonem argumentu m dle rovnice (6). Ze vzorce (46), který při polárních souřadnicích totéž vypovídá, co *Fourierův* integrál (23) při $z = 0$ a souřadnicích *Cartesiových*, lze k danému $\zeta'_{(z=0)}$ a $\frac{\partial \zeta_{(z=0)}}{\partial t}$ v čase $t = 0$ najíti tvar povrchu v každém okamžiku pozdějším. Je-li $\zeta_{(z=0)}$ a $\frac{\partial \zeta'}{\partial t_{(z=0)}}$ v $t = 0$ symmetrické kol centra souřadnic, podržíme ze summy $\sum_{k=0}$ jen člen $k = 0$. Tento speciálný problém jest řešitelným na př. pro hlubokou tekutinu, je-li počáteční rozruch omezen na malý kruh kolem počátku souřadnic, když na př. kapka dopadne na klidnou hladinu vodní. Analogický jednodimensionálný problém jest řešen v (§ 65.). Vidíme, jakých obtíží poskytuje theorie tohoto nejprimitivnějšího projevu vlnění. Chceme ještě dodati, že se rovnice (46) zjednoduší, definujeme-li, jak často se děje, *k*-tý *úkon Besselův* součinem z pravé strany rovnice (31) a faktoru $(1 : 2^k \cdot k!)$

§ 71. ***Vliv horního media, větru, kapillarity.*** Nad původně klidným spodním mediem nalézá se jiné, jež se (jako vítr) stejnoměrně pohybuje (řekněme ve směru osy x-ové) *konečnou* rychlostí U. Třením povrchovým neb jinými příčinami se tento stav nekonečně málo poruší a nastává otázka, kdy nový superponovaný pohyb zůstává trvale neskonale malým. Budiž φ_1, p_1, ϱ_1 potenciál tlak a hustota v dolním, $\Phi = Ux + \varphi_2$, p_2, ϱ_2 v horním mediu.

Ze známého vzorce

$$-\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + gz$$

obdržíme až na veličiny vyššího řádu:

$$p_1 = -\varrho_1\left(gz + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right), \quad p_2 = -\varrho_2\left(gz + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \tfrac{1}{2}U^2 + U\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) \qquad (47)$$

Podmínku platnou na společném rozhraní najdeme takto. Sestrojme nad elementem jeho $d\omega$ neskonale nízký válec zasahující do *obou* tekutin. Zdola podléhá tlaku $p_1\,d\omega$, svrchu $p_2\,d\omega$, po bocích *napjetí* kapillárnému, jehož výslednice do spodního media čelící jest ekvivalentní kapillárnému tlaku $d\omega\, T . K$, kdež T kapillárnou konstantu a K součet hlavních křivostí: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ označuje, při čemž se R kladně čítá, leží-li středy křivosti v mediu dolním. Nemá-li zmíněný válec, jehož výška ad libitum malou volena býti může, nabýti zrychlení nekonečně velikého, musí na povrchu býti:

$$p_1 - p_2 - KT = 0 \qquad (48)$$

Křivost K lze následujícím způsobem vyjádřiti potenciálem φ_1. Hmotný bod dolní tekutiny nalézající se na povrchu má v jistém okamžiku souřadnice x, y, ζ, z nichž ζ, exkurse nad rovnovážnou hladinu $z = 0$, jest dle předpokladu neskonale malá.

Tyto tři veličiny x, y, ζ závisí od času t a od x_0, y_0, to jest od posice, kterou bod zaujímal v povrchu původně klidném. Eliminací veličin x_0, y_0 najdeme $\zeta = f(x, y, t)$, což jest zároveň v čase t rovnicí plochy rozhraní tvořící. Argumenty x, y, t jsou nyní na sobě nezávislé. Křivost plochy jest:

$$K = -\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \qquad (48^a)$$

a závisí jako ζ samo explicitně od t, pak od x, y.

Vertikálná rychlost bodu povrchového jest jednak

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x, y, z)_{z=\zeta}, \text{ jinak } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

protože z koordinatou řečeného bodu v čase $t + dt$ jest

$$\zeta' = f(x + u\,dt,\ y + v\,dt,\ t + dt).$$

Se zanedbáním veličin vyššího řádu máme tudíž:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x, y, z)_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Následkem toho bude:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}_{(z=0)} \tag{49}$$

Veličiny p_1, p_2, K lze tedy vesměs vyjádřiti potenciály φ_1 a φ_2. Známe-li tyto jakožto úkony času t a okamžité posice x, y, z, bude vztah (48), jen na povrchu platný, patrně rovnicí $F(x, y, z, t) = 0$ plochy rozhraní tvořící. Pišme tedy:

$$F(x, y, z, t) = 0 = p_1 - p_2 - KT.$$

Určitá částice jedné neb druhé tekutiny, která jednou v rozhraní byla, bude v něm vždy obsažena. Jsou-li tudíž u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 rychlosti dvou částic jedné i druhé tekutině náležejících, které se v jistém okamžiku v společném bodě rozhraní xyz stýkaly, budou vždy částicemi rozhraní. Přejde-li t v $t + dt$, bude rovnice rozhraní míti tvar $F(x, y, z, t + dt) = 0$ a vyhovíme jí, kladouce za plynulé x, y, z jednak $x + u_1dt$, $y + v_1dt$, $z + w_1dt$ (což jsou v čase $t + dt$ souřadnice částice prvé), jinak $x + u_2dt$, $y + v_2dt$, $z + w_2dt$ (což jsou v $t + dt$ souřadnice částice druhé).

Tedy bude na rozhraní v platnosti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + u_1\frac{\partial F}{\partial x} + v_1\frac{\partial F}{\partial y} + w_1\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t} + u_2\frac{\partial F}{\partial x} + v_2\frac{\partial F}{\partial y} + w_2\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Z obou rovnic (50) jde odečtením na jevo, že relativná rychlost obou tekutin ve směru normály jest na povrchu nullou, jak to býti má.

V našem případě jest:

$$F(x, y, z, t) = 0 = -KT$$
$$+ \varrho_2\left(gz + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \tfrac{1}{2}U^2 + U\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) - \varrho_1\left(gz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) \qquad (50^a)$$

Jsou-li pohyby superponované, t. j. i φ_1 i φ_2 velmi malé, budou $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ veličinami téhož řádu jako φ_1 neb φ_2, kdežto $\frac{\partial F}{\partial z} = g(\varrho_2 - \varrho_1)$ jest konečné. Rychlosti $u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ jakož i v_1, w_1, v_2, w_2 jsou opět veličinami téhož řádu, za to $u_2 = U + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$ neb kratšeji $u_2 = U$ konečné.

Majíce k tomu zřetel, obdržíme z (50):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} g(\varrho_2 - \varrho_1) = 0 \qquad (51)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} g(\varrho_2 - \varrho_1) = 0 \qquad (52)$$

Místo (52) lze po odečtení (51) a (52) též psáti:

$$U\frac{\partial F}{\partial x} + g(\varrho_2 - \varrho_1)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) = 0 \qquad (52')$$

Differencujeme-li tuto v každém čase platnou podmínku parciálně dle t, a dosadíme-li $\frac{\partial F}{\partial t}$ z rovnice prvé, obdržíme místo (52)

$$U\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) \qquad (53)$$

Rovnice (51) přejde se zřetelem na (49) a (50^a) v rovnici:

$$T\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right) + \varrho_2\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + U\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial t}\right)$$
$$- \varrho_1\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} g(\varrho_2 - \varrho_1) = 0 \qquad (54)$$

Tekutiny buďtež omezeny horizontálnými stěnami $z = -h_1$, $z = h_2$, ostatně ať sahají do nekonečna. Jde-li o vlny, jež se jen směrem $\pm$ x-ové osy šířiti mohou a nezávisí-li nic na souřadnici y, vyhovíme rovnicím *Laplace-ovým* a podmínce na

obou dnech supposicí:

$$\varphi_1 = A_1 \cos(mx - nt) Z_1, \quad \varphi_2 = A_2 \cos(mx - nt) Z_2 \qquad (55)$$

A_1, A_2 jsou konstanty, Z_1 a Z_2 úkony koordinaty z:

$$Z_1 = e^{m(z+h_1)} + e^{-m(z+h_1)}; \quad Z_2 = e^{m(z-h_2)} + e^{-m(z-h_2)}.$$

Výrazy (55) zavedeme do (53) a (54), kladouce po provedení derivací dle z $z = \zeta$, neb protože ζ jest proti h nekonečně malé, $z = 0$.

Eliminujeme-li z obou takto vzniklých rovnic A_1 a A_2, obdržíme vztah mezi n a m. Provedení počtu dává, označíme-li derivace úkonů Z dle z čárkami:

$$A_1 Z'_1 (n - mU) = n A_2 Z'_2,$$

$$A_2 Z_2 \varrho_2 n (n - mU) = A_1 \left(\varrho_1 n^2 Z_1 - (\varrho_1 - \varrho_2) g Z'_1 - T m^2 Z'_1\right).$$

Odtud:

$$\left(\varrho_1 n^2 \frac{Z_1}{Z'_1} - g(\varrho_1 - \varrho_2) - Tm^2\right) = \frac{Z_2}{Z'_2} \varrho_2 (n - mU)^2 \qquad (55)$$

Položme:

$$\frac{Z_1}{Z'_1} = \frac{1}{m} \frac{e^{mh_1} + e^{-mh_1}}{e^{mh_1} - e^{-mh_1}} = \frac{1}{m} \sigma_1, \quad \frac{Z_2}{Z'_2} = -\frac{1}{m} \frac{e^{mh_2} + e^{-mh_2}}{e^{mh_2} - e^{-mh_2}} = -\frac{1}{m} \sigma_2.$$

Je-li ω rychlost, s kterou vlny postupují, bude

$$n = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau\omega} . \omega = m\omega;$$

tedy se zřetelem na $m = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\left(\omega^2 \sigma_1 - g \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)}{\varrho_1 m} - \frac{Tm}{\varrho_1}\right) + (\omega - U)^2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \sigma_2 = 0 \qquad (56)$$

Vliv hmotnosti klidného vzduchu při ($U = 0$) na ω jest dle (56) velmi nepatrný. Větší jest vliv kapillarity. Při $\varrho_2 = 0$ bude totiž

$$\omega^2 = \frac{g}{m}\left(1 + \frac{T}{g\varrho_1} m^2\right) \frac{e^{mh_1} - e^{-mh_1}}{e^{mh_1} + e^{-mh_1}} \qquad (57)$$

Kapillarita zvětšuje tudíž účinek tíže v míře rostoucí s $m = \frac{2\pi}{\lambda}$, a stane se při malých délkách vlny dokonce *roz-*

hodujícím činitelem. Tak na př. jest při vodě a vzduchu kap. napjetí $T = 7\cdot5\,mg$ váhy na délkový millimetr, $g\varrho_1 = 1\,mg$; je-li $\lambda = 2\pi^{mm} = 6\cdot28^{mm}$, bude vliv tíže vyjádřen číslem *1*, onen kapillarity číslem *7·5*. Při vlnách *10*-krát kratších, jež na př. ladičkou na vodě neb rtuti vyvoditi lze, ustupuje tíže úplně do pozadí. (Dynamická methoda k určování *T*.)

Při $h_1 = \infty$ jest $\omega^2 = \frac{g}{m} + \frac{T}{\varrho_1} m$ a existuje pro $m = m_0$, jdoucí ze vztahu: $\frac{1}{m_0^2} = \frac{T}{g\varrho_1}$ neb $\lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\varrho_1}}$, minimálné ω (λ_0 pro vodu $= 17\cdot1\,mm$).

Budiž $U \gtrless 0$. Jednej se o $h_2 = h_1 = \infty$, a budiž ω_0 hodnotou pro ω, je-li $U = 0$. Rovnici (56) lze pak, je-li ϱ_2 malé proti ϱ_1, psáti ve formě:

$$\omega^2 - 2\omega U \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \omega_0^2 - U^2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \quad \text{neb} \quad \omega = U \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \pm \sqrt{\omega_0^2 - U^2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}.$$

Je-li ω reálné, jsou buď oba kořeny kladné, tak že se vlny jen *směrem větru* šířiti mohou, aneb jest (při malých U...

$\omega = U \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \pm \omega_0$) jeden kořen kladný a druhý záporný. Vlny se pak šíří i proti větru, s menší však rychlostí nežli směrem jeho.

Vlny nekonečně malých exkursí nemohou existovati, vyjde-li ω imaginárným, tedy při:

$$U^2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1} > \omega_0^2, \quad \text{neb} \quad U^2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1} > \frac{g}{m} + \frac{T}{\varrho_1} m, \quad \text{neb}$$

$$\left(m - \frac{U^2\varrho_2}{2T}\right)^2 < \left(\frac{U^2\varrho_2}{2T}\right)^2 - \frac{g\varrho_1}{T} \qquad (58)$$

Voda a proudící vzduch tvoří pak labilní systém dynamický. Nekonečně malé porušení rozhraní nesetrvá, nýbrž přejde v konečné. Ze vzorce (58), v němž levá strana podstatně kladnou jest, seznáváme, že existence *lability* jest vázána na *nutnou* ale nepostačující podmínku: $U \geqq \sqrt[4]{\frac{4Tg\varrho_1}{\varrho_2^2}}$. (Pro vzduch a vodu jest tato kritická rychlost větru $U_0 = 6\cdot45\,m$; zvětšením kapillárného napjetí se hodnota její zvýší.)

Délky vln, pro které ještě *stabilita* vzdor $U \geqq U_0$ existovati může, jdou z podmínky (58) po záměně znaménka $<$ v $>$:

$$\left(m - \frac{U^2\varrho_2}{2T}\right)^2 > \left(\frac{U^2\varrho_2}{2T}\right)^2 - \frac{g\varrho_1}{T}.$$

Zavede-li se zde $\frac{1}{m_0^2} = \frac{T}{g\varrho_1}$, pak hodnota U_0, bude:

$$\left(\frac{m}{m_0} - \frac{U^2}{U_0^2}\right)^2 > \left(\frac{U}{U_0}\right)^4 - 1$$

$$\frac{m}{m_0} > \frac{U^2}{U_0^2} + \sqrt{\left(\frac{U}{U_0}\right)^4 - 1}.$$

Skrz $m : m_0 = \lambda_0 : \lambda$, kdež λ_0 jest délka vlny s minimálnou rychlostí, obdržíme:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} < \frac{U^2}{U_0^2} - \sqrt{\frac{U^4}{U_0^4} - 1}.$$

Jestliže tedy rychlost větru jest větší nežli rychlost kritická, mohou nekonečně malými zůstati jen vlny menší než λ_0 (λ_0 u vody $= 17$ *mm*). Delší vlny nemohou míti exkurse nekonečně malé.

Jsou-li *obě* media v pohybu, rychlost dolejšího U_1, hořejšího U_2, pak si lze mysliti souřadnicový systém, jenž *stejnoměrně* s rychlostí U_1 pokračuje, a vůči němuž dolní medium se v klidu nalézá. Dynamické rovnice zůstávají tu v platnosti, jen že $U = U_2 - U_1$ označuje relativnou rychlost media horního vůči dolnímu. Podobně bude $\omega = \Omega - U_1$ rychlostí vln vůči pohyblivému systému, když Ω jest rychlostí jejich vůči *pevnému.*

Na místo (56) nastoupí tedy po malé transformaci rovnice:

$$\varrho_2\sigma_2 (\Omega - U_2)^2 + \varrho_1\sigma_1 (\Omega - U_1)^2 = g\,\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)}{m} + Tm.$$

§ 72. ***Vlny konečné výšky.*** *) Dle § 63 odst. *C* opisuje při postupu vln v nekonečně hluboké stroužce každá částice tekutiny malý kruh kol své polohy rovnovážné.

Položíme-li (l. c.) místo $-\frac{m}{n} Ae^{mh} \ldots B$, $m = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\tau\omega}$, $n = \frac{2\pi}{\tau}$, kontrahujeme-li ϑ s t a necháme-li h přejíti v ∞, obdržíme pro úchylky z polohy rovnovážné:

$$\xi' = Be^{\frac{2\pi}{\lambda}\zeta} \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{\omega}\right); \quad \zeta' = -Be^{\frac{2\pi}{\lambda}\zeta} \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{\omega}\right).$$

---

*) *Gerstner*, Spisy Král. Uč. spol. v Praze 1802, *Rankine* Phil. Trans. 1863.

Pomocí *Langrange-ových* rovnic lze ukázati, že podobný pohyb jest možným i při konečných drahách kruhovitých.

Souřadnice okamžité polohy částice x, y, z závisí na t a na *třech* parametrech a, b, c, které můžeme považovati za souřadnice k částici přiřaděného neproměnlivého bodu prostorového. Supponujme, že kol takových bodů (které, jak uvidíme, se liší od rovnovážných poloh příslušných částic) opisovány jsou kruhy s poloměry $R = f(c)$.

Položme tedy podobně jako v předchozích vzorcích:

$$y = b\,;\ x - a = R \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{a}{\omega}\right);\ z - c = -R \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{a}{\omega}\right) \qquad (59)$$

Rovnice (2) a (1) [kap. II.] přejdou při $X = Y = 0$, $Z = -g$ skrz $\frac{\partial y}{\partial b} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial c} = 0$ ve vztahy:

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} = C \qquad (60)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g\right)\frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g\right)\frac{\partial z}{\partial c} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Z (59) jde

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \chi,\ \frac{\partial z}{d c} = 1 - \frac{\partial R}{\partial c} \sin \chi,\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 R}{\tau^2} \cos \chi \\ &\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial c} \cos \chi,\ \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{2\pi R}{\lambda} \cos \chi;\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 R}{\tau^2} \sin \chi \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

kdež $\chi = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{a}{\omega}\right)$.

Substituce do (60) dává

$$1 - \frac{2\pi R}{\lambda}\frac{\partial R}{\partial c} + \sin \chi \left(\frac{R \,.\, 2\pi}{\lambda} - \frac{\partial R}{\partial c}\right) = C \qquad (60^a)$$

Pravá strana jest (viz pag. 7. rovn. 2.) na čase nezávislá; odtud $\frac{R \,.\, 2\pi}{\lambda} = \frac{\partial R}{\partial c}$, neb $R = R_0\, e^{\frac{2\pi c}{\lambda}}$, kdež R_0 náleží ku $c = 0$. Nemá-li R nikde býti nekonečným, musí c býti záporné, tak že jest pro $c = -\infty$ $R = 0$ a dle (60ª) C pro $c = -\infty$ kladným, tudíž dle svého geometr. významu vždy kladným (viz kap. II. § 4.)

Substituce z (62) do (61) dává

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}=R\cos\chi\left(\frac{2\pi}{\lambda}g-\frac{4\pi^2}{\tau^2}\right)$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}=g-\frac{4\pi^2 R}{\tau^2}\frac{\partial R}{\partial c}+\sin\chi\left(\frac{4\pi^2 R}{\tau^2}-g\frac{\partial R}{\partial c}\right).$$

Eliminací tlaku p a zavedením hodnoty $\partial R/\partial c = R\,2\pi/\lambda$ najdeme: $\frac{2\pi}{\lambda}g=\frac{4\pi^2}{\tau^2}$ neb skrz $\tau^2=\frac{\lambda^2}{\omega^2}\ldots\omega=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$.

Týž vzorec jde při $h=\infty$ ze vzorce (4) (pag. 226).

Odtud:

$$\frac{\partial p}{\partial a}=0;\ -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}=g-\frac{R\partial R}{\partial c}\cdot\frac{4\pi^2}{\tau^2}=g\left(1-R_0^2 e^{\frac{4\pi c}{\lambda}}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)\ \text{a}$$

$$p=-\varrho g\left(c-\frac{R_0^2\pi}{\lambda}e^{\frac{4\pi c}{\lambda}}\right)+const.$$

Tlak závisí jen na c. Částice, které byly na povrchu, budou mu vždy náležeti, tlak jejich bude vždy roven stálému tlaku p_0 nad tekutinou. Přísluší jim tedy totéž, jak ustanovíme nulle rovné c, tak že obdržíme:

$$p=p_0-\varrho g\left[c+\frac{R_0^2\pi}{\lambda}-\frac{R_0^2\pi}{\lambda}e^{\frac{4\pi c}{\lambda}}\right]$$

Okamžitý tvar povrchu obdržíme, kladouce v (59) $c=0$, eliminací veličiny a neb eliminací veličiny χ z rovnic

$$x-t\omega+\frac{\chi\cdot\lambda}{2\pi}=R_0\cos\chi,\quad z=-R_0\sin\chi.$$

Rovnice povrchu má pak tvar $f(x-t\omega,\ z)=0$; povrchový tvar postupuje stálou rychlostí ω směrem rostoucího x.

Křivka povrchová jest trochoida, kterou opisuje bod B, jenž se nalézá ve vzdálenosti R_0 od středu jisté kruhové desky o radiu $\lambda/2\pi$, která sama se valí na čáře $c=+\lambda/2\pi$ nad povrchem klidným položené, v němž střed desky trvale obsažen jest. Přejde-li B na periferii desky, to jest dosáhne-li R_0 hodnoty $\lambda/2\pi$, přejde trochoida v obyčejnou cykloidu s hroty na vrch obrácenými. Jsou to body s křivostí tudíž i s rychlostí

nekonečně velikou, v nichž se tekutina ztrácejíc kohaesi rozstřikuje. Jde to i z jiné úvahy. Původ rovnice (60) vězí ve stálosti plochy trojúhelníka (nastupujícího na místo tetraedru v kap. II. § 4) o rozích příslušných ku (a, c), $(a + da, c)$ $(a, c + dc)$, jimž náleží souřadnice

$$(x, z), \left(x + \frac{\partial x}{\partial a} da,\ z + \frac{\partial z}{\partial a} da\right), \left(x + \frac{\partial x}{\partial c} dc,\ z + \frac{\partial z}{\partial c} dc\right).$$

Plochou jeho jest $C . \frac{da . dc}{2}$, kdež C jest kladná veličina v (60), za kterouž dle (60[a]) dovoleno jest položiti $1 - \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$. Z absolutnosti plochy jde, že pohyb udaný rovnicemi (59) jest při $c = 0$ jen možným, je-li $R_0 \leq \frac{\lambda}{2\pi}$.

Dejme tomu, že souřadnice *rovnovážné polohy* částice příslušné ku a, c jsou a_0, c_0.

Z rovnosti ploch jde:

$$\left(1 - \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2}\right) . da . dc = da_0 . dc_0.$$

Položíme-li $a = \sigma a_0$, $c = \sigma c_0$, bude $\sigma = 1 : \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2}}$,

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2}}}, \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2}}}.$$

Centra drah kruhových lze tedy najíti z poloh rovnovážných a_0 c_0. Pro extremně dlouhé vlny aneb malé R jest $a = a_0$, $c = c_0$; obíhání v kruzích děje se pak kol poloh rovnovážných.

Kapitola X.

§ 73. *O silách viskosity.*

Jak již v prvé kapitole uvedeno bylo, lze vliv viskosity redukovati na účinek plošných sil, vyjádřitelných šesti napjetími X_x, X_y, X_z, Y_y, Y_z, Z_z. O těchto se *Stokesem* předpokládáme, že jsou úkony veličin, které udávají, *jak rychle se velikost* a *tvar určité částice mění*, supponujeme tedy, že závisí na *šesti defor-*

mačních rychlostech:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial w}{\partial z}, \ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{0}$$

o nichž v § 5. jednáno bylo.

Jsou-li u, v, w *vždy* a *všude* velmi malé, jsou jimi výrazy $\frac{\partial u}{\partial x} \dots$ v rovnici (0) a lze se domnívati, že veličiny $X_x \dots$ jsou následkem toho *lineárnými* úkony deformačních rychlostí (0). Konsekvence této hypothesy souhlasí velmi dobře se zkušeností.

Položme tedy:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ &\quad + \nu' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ Y_x &= l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} + l' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + m' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ &\quad + n' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Připomeňme si význam veličin X_x, Y_x, Z_x, dle kterého jsou bcX_x, bcY_x, bcZ_x osovými komponentami šikmého napjetí, kterému elementárný hranol abc v posici xyz podléhá na stěně (bc) hledící ve směru rostoucího x. Jde nyní o nalezení vztahů mezi $\lambda\mu \dots n'$. Volme si za tím účelem nový souřadnicový systém x', y', z', v němž osa y' má protivný směr osy y-ové, tak že pro souřadnice *téhož* bodu, potažmo pro osové komponenty *téže* rychlosti, platí vztahy: $x' = x$, $y' = -y$, $z' = z$, $u' = u$, $v' = -v$, $w' = w$, z nichž vychází

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'}\right), \\ &\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

O komponentách *téhož* skutečného napjetí na (bc), vztažených k osám *novým*, platí dle definice jejich:

$$X'_{x'} = X_x, \quad Y'_{x'} = -Y_x, \quad Z'_{x'} = Z_x \tag{1^a}$$

Veličiny $X'_{x'}$, $Y'_{x'}$ můžeme opět vypočítati ze vzorců (1),

jestliže místo $\frac{\partial u}{\partial x} \dots \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ položíme $\frac{\partial u'}{\partial x'} \dots \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}\right)$.
Konstanty $\lambda \dots \nu'$, $l \dots n'$ zůstanou tytéž, poněvadž při isotropii tekutiny nejsme v stavu udati příčiny, proč by v soustavě $x, +y, z$ byly jinými nežli v soustavě $x, -y, z$. Ze vztahů (1), (1ᵃ), (2) plyne pak:

$$\lambda' = \mu' = 0, \quad l = m = n = n' = 0.$$

Opakujeme-li podobné úvahy s novým systémem:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z,$$

shledáme $\nu' = 0$, $m' = 0$. Z isotropie tekutiny jde ostatně $\mu = \nu$. Zavedeme-li $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, obdržíme při jiném označení konstant z rovnic (1):

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta\vartheta, \quad Y_x = k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \text{a podobně:}\quad Y_y &= \alpha \frac{\partial v}{\partial y} + \beta\vartheta, \quad Z_z = \alpha \frac{\partial w}{\partial z} + \beta\vartheta \\ Y_z &= k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad Z_x = k\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2^a)$$

Mezi konstantami α, k panuje vztah $\alpha = 2k$ na isotropii tekutiny založený. Představme si k vůli důkazu nový souřadnicový systém, v němž osy $x'z'$ jsou vůči osám xz otočeny o úhel φ, tak že jest:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - z' \sin\varphi, \quad y' = y, \quad z = z' \cos\varphi + x' \sin\varphi, \\ u' &= u \cos\varphi + w \sin\varphi, \quad v' = v, \quad w' = w \cos\varphi - u \sin\varphi. \end{aligned}$$

Plošný element $d\omega$ kolmý na ose x', jehož normála svírá s osou x-ovou úhel φ, podléhá na jednotce plochy směrem normály napjetí:

$$X'_x = \alpha \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta\vartheta' = X_n \cos\varphi + Z_n \sin\varphi,$$

kdež $X_n = X_x \cos\varphi + X_z \sin\varphi$, $Z_n = Z_x \cos\varphi + Z_z \sin\varphi$ jsou (rovn. 3., kap. I.) osové komponenty napjetí celistvého.

Odtud jde:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \frac{\partial u'}{\partial x} + \beta\vartheta' = X_x \cos^2\varphi + Z_z \sin^2\varphi + 2 \sin\varphi \cos\varphi\, Z_x = \\ &\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos^2\varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \sin^2\varphi\right) + \beta\vartheta + \sin 2\varphi\, k\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2^b)$$

Ze vztahu:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}\right)(u\cos\varphi+w\sin\varphi)$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\sin^2\varphi\frac{\partial w}{\partial z}$$

a z podobně odvoditelné relace:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}=\vartheta'=\vartheta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

jde se zřetelem na rovnici (2^b)

$$2k=\alpha \qquad (3)$$

Konstanta β v (2^a) nepřichází k platnosti u tekutiny prakticky nestlačitelné ($\vartheta=0$). Ze zvláštní (nikterak nutné hypothesy) usuzuje ostatně *Stokes* ještě vztah $\beta=-\frac{2}{3}k$. Dle rovnice (1., kap. I.) jest x-ová komponenta $P.abc$ *veškerých* sil plošných, které účinkují na elementární hranol abc úměrna objemu jeho a výrazu $\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}$, který se v našem případě redukuje na

$$k\Delta u+(k+\beta)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}; \qquad (4)$$

Eulerovy rovnice (3., kap. II.) nabudou pak tvaru:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{Du}{Dt}&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\varrho X+k\Delta u+(k+\beta)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\\ \varrho\frac{Dv}{Dt}&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\varrho Y+k\Delta v+(k+\beta)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\\ \varrho\frac{Dw}{Dt}&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\varrho Z+k\Delta w+(k+\beta)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Význam konstanty k ve vzorcích

$$X_x=2k\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\vartheta\ \ldots,\quad X_z=k\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

vyšetříme představíce si, že se tekutina pohybuje ve vrstvách rovnoběžných rovině xy rychlostí $u=f(z)$, $v=0$, $w=0$. Následkem toho jest $X_y=Y_z=X_x=Y_y=Z_z=0$ a $X_z=k\frac{\partial u}{\partial z}$.

Čítáme-li osu z nahoru a roste-li u směrem jejím, tedy pohání rychlejší vrstva horní vrstvu dolní s ní sousedící tangenciální silou úměrnou ploše a relativnému vzrostu rychlosti $\frac{\partial u}{\partial z}$. Veličina k zove se konstantou viskosity (vniterného tření) a jest patrně kladná.

Rovnice (5), v nichž symbol $\frac{D}{Dt}$ zastupuje značky:

$$\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

nejsou lineárné a integrace jejich jest i v jednoduchých případech obtížná. Jsou-li rychlosti u, v, w velmi malé, a lze-li tekutinu při pohybu považovati prakticky za nestlačitelnou, máme jednodušeji:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho X + k\Delta u \\ \varrho\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho Y + k\Delta v \\ \varrho\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho Z + k\Delta w \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

K těmto rovnicím uvnitř tekutiny přistupují podmínky na hranicích vytvořených povrchy jiných hmot. Je-li u', v', w' rychlost elementu cizí tělesné hranice, u, v, w tekutiny s ním sousedící, označuje $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$ složky rychlosti relativní, která má patrně směr tangenty s k ploše hraničné, protože směrem normály relativné rychlosti není. Její velikost jest:

$$(u' - u)\cos sx + (v' - v)\cos sy + (w' - w)\cos sz.$$

Mysleme si nyní nad povrchovým elementem $d\omega$ tělesa hranice tvořícího vrstvu tekutiny o tloušťce δ nekonečně malé i proti rozměrům elementu $d\omega$ samého, tak že při limitě $\delta = 0$ v úvahu přicházejí jen síly účinkující na obě základny vrstvy a nikoli ty, které působí na plášti jejím. Výslednice jejich jest úměrna ploše $d\omega$, hmota vrstvy rovna součinu $d\omega\,\delta\,.\,\varrho$. Nemá-li vzniknouti vlivem jejich zrychlení nekonečně veliké, musí výslednice býti nullou, tudíž i komponenty její ve směru normály a tangenty ku $d\omega$, neb všeobecněji i osové komponenty její. Této okolnosti použijeme následovně: Těleso hranici tvořící účinkuje na přílehlou vrstvu tekutiny tangenciálním třením

zevnějším S_1, o němž supponovati musíme, že jest úměrno jakémusi úkonu výsledné relativné rychlosti v ploše $d\omega$ a směru téhož jako rychlost relativná. Je-li tato dostatečně malá, lze položiti:

$$S_1 = d\omega\,[(u' - u)\cos sx + (v' - v)\cos sy + (w' - w)\cos sz]\,\lambda,$$

kdež λ, t. z. koefficient tření zevnějšího jest veličinou podstatně kladnou. Označuje-li n normálu ku $d\omega$, čelící *dovnitř* tekutiny, bude plocha vrstvy $d\omega$, *k tekutině přivrácená*, podléhati se strany tekutiny tlaku p a silám viskosity $X_n d\omega$, $Y_n d\omega$, $Z_n d\omega$. Komponenta výslednice směrem tangenty s jest:

$$(X_n \cos sx + Y_n \cos sy + Z_n \cos sz)\,d\omega = S_2.$$

Ze vztahu $0 = S_1 + S_2$ jde pak prvá podmínka:

$$\lambda\,[(u - u')\cos sx + (v - v')\cos sy + (w - w')\cos sz] \\ = X_n \cos sx + Y_n \cos sy + Z_n \cos sz \qquad (7)$$

Učiníme-li podobné úvahy o složce kolmé na $d\omega$, značí-li P tlak tělesa na vrstvu, p tlak tekutiny, bude:

$$P - p + X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz = 0 \qquad (7')$$

Rovnice (7) vyžaduje znalost směru s, který však zrovna jako P v (7') můžeme eliminovati, jestliže úvahy předchozí provedeme se zřetelem na jednotlivé osové komponenty sil na vrstvu účinkujících. Tak na př. obdržíme, majíce zřetel na osu

x-ovou: $\quad d\omega\,[X_n + (P - p)\cos nx + \lambda(u' - u)] = 0$

čili se zřetelem na (7')

$$\lambda\,(u - u') = X_n - \cos nx\,(X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz) \qquad (7'')$$

a podobné dvě rovnice, vztažené k osám y, z.

Větu, že výslednice sil účinkujících na obě základny tenké vrstvy $d\omega$ jest nullou, lze vyjádřiti i v ten smysl, že síla, kterou tekutina na ni účinkuje, jest totožna se silou, kterou vrstva na hraničící těleso přenáší. Jest to následek principu akce a reakce mezi tělesem a tekutinou. Připomeňme ještě, že při $\lambda = \infty$ relativná rychlost mezi stěnou a tekutinou na nullu klesnouti musí (úplná adhaese), nemá-li dle (7'') X_n atd. se státi nekonečně velikým.

Hraničí-li *dvě* rozličné partie téže tekutiny v ploše dis-

kontinuity, tedy si mysleme nad elementem společného rozhraní nizounký válec sahající do *obou* partií, jehož hmota jest $d\omega\,\delta\,.\,\varrho$.

Je-li p, p' tlak v jedné, potažmo druhé partii, označují-li n, n' normály do vnitřku jejich, tedy jde podobnou úvahou jako dříve:

$$\left.\begin{aligned} X_n - p\cos nx + X_{n'} - p'\cos n'x = 0 \\ Y_n - p\cos ny + Y_{n'} - p'\cos n'y = 0 \\ Z_n - p\cos nz + Z_{n'} - p'\cos n'z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7''')$$

§ 74. ***Vztahy energetické.*** Všeobecným karakterem sil viskosity jest ničení neb lépe řečeno převod mechanické energie ve formu nemechanickou. Násobme rovnice (5) po sobě výrazy $u\,d\tau$, $v\,d\tau$, $w\,d\tau$ a integrujme přes libovolný prostor B tekutinou vyplněný. Hmota tělesného elementu $d\tau\,\varrho$ se při pohybu nemění, tudíž označuje výsledek počtu na levé straně, to jest:

$$\int d\tau\,\varrho\left(u\frac{Du}{Dt} + v\frac{Dv}{Dt} + w\frac{Dw}{Dt}\right) = \frac{D}{Dt}\int\frac{d\tau\varrho}{2}(u^2+v^2+w^2) = \frac{DT}{Dt}$$

vzrost kinetické energie T v jedničce časové pro hmotu tekutou, která okamžitě zaujímala prostor B.

Výsledek operací na pravé straně rovnic (5), psaných v původní formě

$$\varrho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho X + P, \quad \text{kdež} \quad P = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

skládá se předně ze summandu

$$J_0 = \int d\tau\,\varrho\,(Xu + Yv + Zw),$$

označujícího práci zevních sil vztaženou k jednotce časové. Druhý summand

$$\int d\tau\left[u\left(P - \frac{\partial p}{\partial x}\right) + v\left(Q - \frac{\partial p}{\partial y}\right) + w\left(R - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\right]$$

transformuje se dle *Greenovy* poučky na rozdíl $J_1 - J_2$; při tom jest

$$J_1 = \int d\omega\,[p\,(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz) - (uX_n + vY_n + wZ_n)],$$

kdež X_n, Y_n, Z_n jsou veličiny vyskytující se v rovnici (3)

kap. I. Dále jest

$$J_2 = \int d\tau \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} X_x + \frac{\partial v}{\partial y} Y_y + \frac{\partial w}{\partial z} Z_z \right.$$
$$\left. + X_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + X_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Y_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\}$$

Po zavedení hodnot za $X_x \ldots$ z rovnic (2^a) a se zřetelem na $\alpha = 2k$ bude

$$J_2 = \beta \int d\tau \, . \, \vartheta^2 + k \int d\tau \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \qquad (7''')$$

Úhrnný výsledek počtu lze psáti ve formě:

$$\frac{DT}{Dt} = J_0 + J_1 - J_2 \qquad (7^{IV})$$

Ve výrazu pro J_1 značí n směr normály kladně čítaný do prostoru B, tedy $-X_n$, $-Y_n$, $-Z_n$ osové komponenty tahu, jemuž tekutina na svých hranicích podrobena jest se strany těles, která ji omezují. Jest tedy J_1 prací, kterou hranice vnášejí do tekutiny v jednotce časové svým tlakem p a napjetími viskositními. Rovnice (7^{IV}) dí pak, že $J_0 + J_1$, to jest práce sil zevních (uvnitř tekutiny) a sil povrchových se mění jen z části v kinetickou energii, z části pak druhé v energii jiného původu, jejíž obnos jest J_2.

Při klidných hranicích ($u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$) jest

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = 0,$$

pak dle ($7''$):

$$\lambda u = X_n - \cos nx \, (X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz)$$

s podobnými dvěma rovnicemi. Násobením na u, v, w a sečtením obdržíme:

$$u X_n + v Y_n + w Z_n = \lambda (u^2 + v^2 + w^2).$$

Tím bude: $J_1 = -\lambda \int d\omega \, (u^2 + v^2 + w^2)$.

Není-li zevnějších sil ($J_0 = 0$), máme místo (7^{IV}):

$$\frac{DT}{Dt} = J_1 - J_2 \qquad (7^{\alpha})$$

Pravá strana rovnice (7^α) jest při $\vartheta = 0$ vždy záporná. Konstanty λ, k jsou totiž podstatně kladné dle představy fysikální, kterou s nimi spojujeme. Jest tedy J_1 podstatně záporné a J_2 kladným. Na každý způsob vidíme, že se vlivem viskosity kinetická energie mění v jinou formu nemechanickou.

Kinetická energie T nemůže klesnouti pod nullu; byla-li tudíž při klidných hranicích a nepřítomnosti sil zevních tekutina v klidu, tedy v něm setrvá.

Odtud plyne, je-li v čase $t = 0$ rychlost u, v, w v tekutině od místa k místu předepsána a na hranicích prostoru dána úkonem časovým, že řešení úlohy jest vždy jednoznačným. Rozdíl dvou možných řešení repraesentoval by totiž pohyb tekutiny s hranicemi klidnými a s počátkovou rychlostí nullovou; kinetická energie jeho jest vždy nullou, tudíž i rozdíl obou možných řešení.

§ 75. ***Vířivý pohyb a viskosita.*** Postupem podobným jako v § 6. najdeme pro nestlačitelnou tekutinu ($\varrho = const$, $\vartheta = 0$) a při existenci potenciálu zevních sil z rovnic (5) tyto rovnice pro vírové komponenty p', q', r':

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{Dp'}{Dt} - k\Delta p' &= \frac{\partial u}{\partial x}p' + \frac{\partial u}{\partial y}q' + \frac{\partial u}{\partial z}r' \\ \varrho\frac{Dq'}{Dt} - k\Delta q' &= \frac{\partial v}{\partial x}p' + \frac{\partial v}{\partial y}q' + \frac{\partial v}{\partial z}r' \\ \varrho\frac{Dr'}{Dt} - k\Delta r' &= \frac{\partial w}{\partial x}p' + \frac{\partial w}{\partial y}q' + \frac{dw}{\partial z}r'\end{aligned}\right\} \qquad (7^\beta)$$

Sahá-li tekutina do nekonečna, kde jest v klidu, není-li ve vnitřku jejím ploch s rozpojitou rychlostí ani těles hranice tvořících, není potřeba jiných rovnic splniti než (7^β).

Odtud jde, je-li v čase $t = 0$ vírová rychlost *všude* nullou, že jí bude trvale. Existují-li však stěny hraničné, musí během času víření samo od sebe vzniknouti. Neb v případě opáčném existoval by potenciál rychlosti, jenž *Laplace-ovou* rovnicí a velikostí normálové rychlosti na hranicích již ustanoven jest, tak že se nemůže snášeti s dalšími podmínkami ($7''$). Plochy o rozpojité rychlosti lze nahraditi dle § 62. vírovými vrstvami a podmínka, že v čase $t = 0$ jest vírová rychlost *všude* nullou, není již splněna. Ostatně jest vznikání vírů za uvedených okolností z existence tangenciálných sil viskositních přímo k pochopení.

Při nepatrných rychlostech máme místo (7^β)

$$\frac{\partial p'}{\partial t}=\frac{k}{\varrho}\Delta p',\quad \frac{\partial q'}{\partial t}=\frac{k}{\varrho}\Delta q',\quad \frac{\partial r'}{\partial t}=\frac{k}{\varrho}\Delta r' \tag{8}$$

Víření šíří se tudíž po způsobě tepla vedeného, při čemž komponentám p', q', r' odpovídá temperatura. Plocha s rozpojitou rychlostí, kterou lze nahraditi tenkou vrstvou vírovou, jest na př. analogem pro tenkou plochu materiálnou, jejíž body mají temperatury rozdílné od všude stálé temperatury media vůkolního. Okamžité téměř dissipaci temperatury odpovídá dissipace virů, *plochy s rozpojitou rychlostí nejsou tudíž útvary stabilními.*

V následujících odstavcích podáváme řešení několika problémů ceny eminentně praktické, zejména se zřetelem na určování konstanty k. Rychlosti $u\,v\,w$ pokládáme vesměs za velmi malé, tak že v (5) za $\frac{Du}{Dt}$ atd. položiti lze $\frac{\partial u}{\partial t}$. Je-li V potenciálem sil zevnějších, můžeme položiti za tlak $p=-\varrho V+p_1$, kdež p_1 jest hydrodynamickou částí tlaku. Rovnice (5) applikované na tekutiny nestlačitelné se tím zjednoduší na

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{\partial p_1}{\partial x}+k\Delta u\\ \varrho\frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{\partial p_1}{\partial y}+k\Delta v\\ \varrho\frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{\partial p_1}{\partial z}+k\Delta w\end{aligned}\right\} \tag{6^b}$$

Odtud jde též:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}=0 \tag{6^c}$$

§ 76. ***Pohyb tekutiny v kapillarách.*** Nepřihlížejíce k partiím tekutiny poblíž konců trubice můžeme si proudění uvnitř představiti tak, jako by se válcovité roury tekutinové přes sebe posouvaly ve směru osy kapillary (zároveň osy x-ové). Klademe tudíž: $v=0$, $w=0$; z rovnice kontinuity jde, že u nezávisí od x, že tedy může jen od y, z, t záviseti, z druhé a třetí rovnice (6^b), že p_1 závisí jen od x a t, z rovnice (6^c), že závislost na x jest lineárná o tvaru:

$$p_1=Ax+B,\text{ tedy } p=-\varrho V+Ax+B.$$

Prvá rovnice (6^b) vede ku:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = - A + k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9}$$

Na vnitřním povrchu kapillary se nalézající vrstva tekutiny podléhá silám od viskosity tekutiny S_1 a od tření na stěně $= S_2$, kdež $S_1 = d\omega\, X_n = d\omega\, (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz)$; ($n$ jest normálou *do* tekutiny kladně čítanou).

Skrz $v = 0$, $w = 0$, $\cos nx = 0$ bude:

$$S_1 = d\omega \,.\, k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial u}{\partial z} \cos nz\right) = d\omega \,.\, k \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Dále jest: $S_2 = - \lambda u\, d\omega$. Ze vztahu $S_1 + S_2 = 0$ jde

$$\frac{k}{\lambda} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = u \tag{10}$$

Hlavní interes se poutá k *ustálenému* pohybu tekutiny $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$, kdy místo (9) máme:

$$\frac{A}{k} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{9a}$$

Je-li průřez trubice kruhem o radiu R, máme z (9^a) kladouce

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{A}{k}$$

a z (10) pro ($r = R$); $\quad u + \frac{du}{dr} \frac{k}{\lambda} = 0 \qquad (10^a)$

Odtud: $\frac{du}{dr} \,.\, r = \frac{A}{k} \frac{r^2}{2} + C, \quad u = \frac{A}{4k} r^2 + C \log r + D.$

Konstanta C se rovná nulle, protože pro $r = 0$ u nemůže býti nekonečným. Z (10^a) jde D a pomocí jeho:

$$u = \frac{A}{4k} \left(r^2 - R^2 - 2 \frac{k}{\lambda} R\right).$$

Množství tekutiny M, které v jedničce časové vyproudí z kapillary, jest:

$$M = \int_0^R 2r\pi\, dr\, u = - \frac{A\pi}{2k} \left[\frac{R^4}{4} + \frac{R^3 k}{\lambda}\right] \tag{11}$$

Lze-li vliv zevních sil (tíže) vynechati, jest p_1 celým tlakem

p, $-A$ pak spádem jeho ve směru toku, tedy $\frac{p_0 - p_l}{l} = -A$, kdež l značí délku kapillary, p_0, p_l tlak tekutiny při vstupu a výstupu.

Pak bude:

$$M = \frac{p_0 - p_l}{l} \frac{\pi R^4}{8k} \left(1 + \frac{4k}{\lambda R}\right) \qquad (11^a)$$

Z experimentálných nálezů *Poiseuillových* jde na jevo úměrnost veličiny M ku R^4, z čehož se souditi dá, že tekutina na stěnách lpí. Vliv tíže dá se ostatně uvésti snadno v počet.

Buďtež g_1, g_2, g_3 projekce zrychlení zemského g na osy souřadnicové, tedy $X = g_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}$ atd. Odtud jde

$$V = -(g_1 x + g_2 y + g_2 z) \text{ a}$$
$$p = p_1 - \varrho V = Ax + B + \varrho(g_1 x + g_2 y + g_2 z).$$

V ose trubice jest $y = 0$, $z = 0$; položíme-li počátek do vtokového konce bude:

$$p_0 = B,\ p_l = (A + \varrho g_1)\, l + B,$$

odtud:

$$-A = \varrho g_1 + \frac{p_0 - p_l}{l} \qquad (12)$$

Svírá-li osa trubice (směrem toku) s tíží úhel φ, bude konečně:

$$M = \frac{\pi}{8k}\left(\frac{p_0 - p_l}{l} + \varrho g \cos\varphi\right)\left(R^4 + 4R^3 \frac{k}{\lambda}\right).$$

Je-li průřez trubice elliptický, $\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$, vyhoví se rovnicím ($9^a$) a (10) při supposici, že tekutina na stěnách roury lpí ($\lambda = \infty$), výrazem:

$$u = S\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right);$$

S se určí z (9^a) a jest rovno: $\frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \cdot \frac{A}{2k}$.

Odtud integraci přes plochu průřezu:

$$M = \left(\frac{-A}{4k}\right) \frac{b^3 c^3 \pi}{(b^2 + c^2)},$$ kdež veličinu A jest vzíti z (12).

Je-li R poloměrem kruhu majícího s ellipsou stejnou

plochu, $b = R(1+\beta)$, bude

$$c = \frac{R}{1+\beta};\quad M = -\frac{A}{8k}\pi \,.\, R^4 \,.\, \frac{2(1+\beta)^2}{1+(1+\beta)^4}.$$

Je-li na př.: $\beta = 0{\cdot}1$, bude $M = -\frac{A\pi}{8k} R^4\, 0{\cdot}982$. Vliv ellipticity není tudíž veliký. Touto methodou výtoku určuje se nejčastěji konstanta k.

§ 77. ***Postupný pohyb koule.*** Při pohybu rotačního tělesa směrem osy symmetrie (zároveň osy x-ové) může v tekutině vůkolní existovati pohyb té vlastnosti, že každá částice trvale zůstává v téže rovině meridianové. Rozkladem rychlosti dle osy symmetrie a kolmo na ni vzniknou složky u, $\Omega = f\left(t, x, \sqrt{y^2+z^2}\right)$ a z Ω osové složky v, w, dané vzorci:

$$v = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\,\Omega = \frac{\partial Q\left(t, x, \sqrt{y^2+z^2}\right)}{\partial y};\quad w = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\,\Omega = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Místo úkonu Q, jenž dle $\sqrt{y^2+z^2}$ derivován dává Ω, lze vždy položiti x-ovou derivaci *jiného* úkonu: $P\left(x, \sqrt{y^2+z^2}, t\right)$, tak že máme

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right);\quad w = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \tag{13}$$

Rovnici kontinuity lze pak vyhověti supposicí:

$$u = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\Delta P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{14}$$

Patrně lze P zvětšiti additivně o veličinu na x, y, z nezávislou, aniž by se tím u, v w změnilo; volíme ji tak, aby P současné s u, v, w se nulle rovnala. Nepodléhá-li tekutina silám zevním, tedy plyne integrací druhé a třetí rovnice (6)

$$p = k \,.\, \Delta \frac{\partial P}{\partial x} - \varrho \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{15}$$

Additivný úkon integrační, ještě na x, t závislý, není třeba připojiti, ustanoví-li se, že tlak p jest v nepřítomnosti pohybu $P = 0$ nulle roven.

Substitucí nalezeného P do prvé rovnice (6) jde

$$\Delta\left(k\,\Delta P - \varrho \frac{\partial P}{\partial t}\right) = 0 \tag{16}$$

Je-li U rychlostí, kterou těleso rotační postupuje dle osy osy x-ové, platí na povrchu jeho:
$U \cos nx = u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz$ neb pomocí (13) a (14)

$$(U + \Delta P) \cos nx = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \tag{17}$$

Je-li těleso koulí o radiu R a o středové posici $x = a$, bude lze podmínce (17) vyhověti supposicí $P = f(r, t)$, $r^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2$, která vede od rovnic (13) a (14) ku:

$$u = -2H - \frac{y^2 + z^2}{r^2} r \frac{\partial H}{\partial r}, \quad v = \frac{(x - a) y}{r^2} r \frac{\partial H}{\partial r},$$

$$w = \frac{(x - a) z}{r^2} r \frac{\partial H}{\partial r}, \tag{18}$$

kdež zkráceně psáno jest $H = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}$. Rovnice (17) vede ku

$$U = \frac{da}{dt} = -2H_{(r=R)} \tag{17^a}$$

Zrovna tak jako u, v, w, lze i tlak a napjetí X_x, Z_z, Z_x vyjádřiti úkonem P neb H. (V meridianové rovině $y = 0$, která jest s ostatními stejně právná, nemají patrně síly viskosity složky k ní kolmé, tedy $Y_x = Y_y = Y_z = 0$.)

Plošný element $d\omega$ teninké vrstvy tekutiny na kouli, v posici $y = 0$, x, z, jíž náleží $\cos nx = \cos \vartheta = \frac{x - a}{R}$, $\cos ny = 0$, $\cos nz = \sin \vartheta = \frac{z}{R}$, podléhá v místech, kde s tekutinou souvisí, na jednotce plochy síle o osových složkách:

$$X_n = X_x \cos \vartheta + X_z \sin \vartheta, \quad Y_n = 0, \quad Z_n = Z_x \cos \vartheta + Z_z \sin \vartheta.$$

Tangenciálná projekce její S ve směru menšícího se ϑ jest:

$$S = X_n \sin \vartheta - Z_n \cos \vartheta = \sin \vartheta \cos \vartheta (X_x - Z_z) - Z_x \cos 2\vartheta$$

neb $$S = k \sin 2\vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k \cos 2\vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Z rovnice (18) jde derivacemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\frac{\partial H}{\partial r}\cos\vartheta - r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)\sin^2\vartheta\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \cos\vartheta\frac{\partial H}{\partial r} + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)\sin^2\vartheta\cos\vartheta \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -3\frac{\partial H}{\partial r}\sin\vartheta + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)\sin\vartheta\cos 2\vartheta$$

tedy $$S = -\frac{k}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right).$$

Tangenciálná rychlost tekutiny, potažmo koule jest

$$u\sin\vartheta - w\cos\vartheta = -\left(2H + r\frac{\partial H}{\partial r}\right)\sin\vartheta,$$

potažmo $U\sin\vartheta$ čili dle (17[a]) $-2H\sin\vartheta$, tedy nadbytek prvé nad druhou $-r\frac{\partial H}{\partial r}\sin\vartheta$.

Zevnější tření S', jemuž vrstva na straně ke kouli převrácené na jednotce plochy podléhá, jest následkem toho $S' = \lambda r\frac{\partial H}{\partial r}\sin\vartheta$. Ze vztahu $S + S' = 0$ jde tudíž povrchová podmínka

$$\lambda r^2\frac{\partial H}{\partial r} = k\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right)\ldots(r = R) \qquad (18^a)$$

Jiná povrchová podmínka jest obsažena v pohybové rovnici koule. Urychlení její $\frac{dU}{dt}$ pochází od sil zevních X, tlaku p a od napjetí viskositních. Rozdělíme-li povrch koule na elementárné pásy $2\pi R^2\,d\vartheta\sin\vartheta$, bude výslednice S'' zmíněných napjetí rovna

$$S'' = 2\pi R^2\int_0^\pi X_n\,d\vartheta\sin\vartheta.$$

Výraz

$$X_n = X_x\cos\vartheta + X_z\sin\vartheta = 2k\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial x} + k\sin\vartheta\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

redukuje se pomocí (19) na

$$X_n = -k\frac{\partial H}{\partial r}(3 + \cos^2\vartheta) - kr^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\right)\sin^2\vartheta, \qquad (20)$$

tedy S'' na

$$S'' = -\tfrac{8}{3}\pi R^2 k\left[5\frac{\partial H}{\partial r} + r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)\right] \qquad (21)$$

Při výpočtu tlaku dle (15) uvážíme: $P = f(r, t), \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r}\frac{x-a}{r}$, pak $\varDelta P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r}$; tím bude po zavedení zkratky $H = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}$ a provedení počtu v (15)

$$p = k\cos\vartheta\left(4\frac{\partial H}{\partial r} + r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right) - \varrho\cos\vartheta\frac{\partial H}{\partial t}r \qquad (22)$$

Výslednice tlaků na kouli ve směru osy x-ové

$$T'' = -\int_0^\pi 2R^2\pi\, d\vartheta \sin\vartheta\, p\cos\vartheta$$

přejde tím v

$$T'' = -\frac{4R^2\pi}{3}\left[k\left(4\frac{\partial H}{\partial r} + r\frac{^2\partial H}{\partial r^2}\right) - \varrho r\frac{\partial H}{\partial t}\right] \text{ pro } r = R \qquad (23)$$

Je-li tedy m hmotou koule, $m' = \frac{4R^3\pi\varrho}{3}$ hmotou vytlačené tekutiny, bude se zřetelem na (17^a)

$$\left(m + \frac{m'}{2}\right)\frac{dU}{dt} = X - 4\pi R^2 k\left(4\frac{\partial H}{\partial r} + r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)_{r=R} \qquad (24)$$

Za U lze dle (17^a) zavésti $-2H_{(r=R)}$. Jde tedy o určení úkonu P, vyhovujícího mimo kouli rovnici (16), který v nekonečnu mizí, na povrchu koule splňuje podmínky (17^a), (18^a) a (24) a se srovnává s daným rozdělením rychlostí v čase $t=0$ (které arciť musí míti týž stupeň symmetrie jako každé pozdější).

Rovnici (16) upravíme na tvar:

$$\varDelta\frac{1}{r}\left\{k\frac{\partial^2(Pr)}{\partial r^2} - \varrho\frac{\partial}{\partial t}(Pr)\right\} = \varDelta\Pi = 0.$$

Veličina Π, zkrácené to označení výrazu stojícího na levo za *Laplace-ovým* znamením $\varDelta$ závisí na x, y, z potud, pokud vězí tyto souřadnice v r a dá se dle § (38) (1) uvésti na tvar

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r} = 0 \quad \text{neb} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Pi r) = 0,$$

jehož integrálem jest $\Pi = A_0 + \frac{B_0}{r}$.

Odtud jde:

$$\frac{k}{r}\,\frac{\partial^2 (Pr)}{\partial r^2} - \varrho\,\frac{\partial P}{\partial t} = A_0 + \frac{B_0}{r}, \tag{25}$$

kdež A_0 i B_0 jsou úkony časové neb konstanty.

Z rovnice (25) lze, dosadíme-li za $\frac{\partial P}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}$ zkratku H a derivujeme-li celek dle r, najíti rovnici, jíž vyhovuje H, úkon to při výpočtu rychlostí (viz 18) zrovna tak pohodlný jako P. Tím obdržíme

$$k\left(r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + 4\,\frac{\partial H}{\partial r}\right) - \varrho\,\frac{\partial}{\partial t}(rH) = -\,\frac{B_0}{r^2} \tag{25^a}$$

neb také při substituci $\Omega = r^3 H$

$$k\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\,\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) - \varrho\,\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -B_0 \tag{26}$$

Poznamenejme ještě, že P závisí na t *explicitně* i *implicitně*, pokud t vězí v a, tedy i v r. Následkem toho jest vlastně

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{\text{expl.}} + \frac{\partial P}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial t},$$

kdež

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial a}\,\frac{\partial a}{\partial t} = -\,\frac{x-a}{r}\,U.$$

Jest tedy na povrchu koule:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{\text{expl.}} - \frac{\partial P}{\partial r}\,.\cos\vartheta\; U.$$

Jde-li o velmi malé rychlosti U, jsou P, H malými veličinami téhož řádu a lze následkem toho v rovnicích (25) i (26) zavésti $\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{\text{expl.}}$, to jest považovati r za neodvislé od času. Řešení nesnadné úlohy povedlo se jen ve dvou jednodušších případech.

A) ***Stav pohybový jest ustálen.*** Následkem vhodně volené zevnější síly X pohybujž se koule se stálou danou rychlostí U. Rychlost bodů tekutinových závisí jen od polohy jejich ke kouli, tedy od r, nikoli však explicitně od t; v rovnici (25) jsou pak A_0 i B_0 konstantami a $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$.

Integrace rovnice (25) dává P ve formě:

$$P = A' \frac{r^2}{6} + B' \frac{r}{2} + C_0 + \frac{D_0}{r}, \text{ tedy} \qquad (26^a)$$

$$H = \frac{A'}{3} + \frac{B'}{2r} - \frac{D_0}{r^3}, \ \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{B'}{2r^2} + 3\frac{D_0}{r^4}, \ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = \frac{B'}{r^3} - 12\frac{D_0}{r^5} \quad (26^b)$$

Pro sílu k udržení ustáleného stavu potřebnou máme skrz $\frac{dU}{dt} = 0$ dle (24):

$$X = 4\pi R^2 k \left(4\frac{\partial H}{\partial r} + r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)_{r=R} \qquad (27)$$

Podmínky (18^a) a (17^a) na povrchu koule platné dávají:

$$B' = \frac{6D_0}{R^2}\left(1 + \frac{2k}{\lambda R}\right), \ \frac{B'}{2R} - \frac{D_0}{R^3} = -\frac{U}{2}, \qquad (27^a)$$

uvážíme-li, že ve výrazu pro H (26^b) A' nulle rovno býti musí, aby v nekonečnu H, tudíž dle (18) i u nemělo hodnoty konečné. Ve výrazu pro P (26^a) jest konstanta C_0 bezpodstatnou, protože při výpočtu rychlostí vypadne, B', D_0 lze vyjádřiti pomocí (27^a) rychlostí U a tím jest úloha řešena. Odtud jde

$$X = 6\pi kUR \frac{1 + \frac{2k}{\lambda R}}{1 + \frac{3k}{\lambda R}} \qquad (28)$$

Pro extremně malé R, jakož i při nepatrném tření zevnějším (λ malé) jest

$$X = 4\pi kUR \qquad (29)$$

Při značném λ jest $X = 6\pi kUR$ (30)

V míře *cm . g . sec*, máme pro vzduch $k = 0{\cdot}000171$ (*Tomlinson*, *Obermayer*). Při padající dešťové kapce jest silou pohyb udržující tíže, tedy

$$X = \frac{4R^3\pi}{3} \,.\, 981{\cdot}1 \text{ dyn},$$

odtud na příklad dle (29) $U = 1{\cdot}3 \,.\, 10^6 R^2\, cm$.

Pro kapku $R = 1/20\ mm$ jest $U = 25\ cm$, pro $R = 1/200\ mm$ jen $2{\cdot}5\ cm$. Lze tedy pochopiti vznášení se ještě jemnějších kapek mlhových, prachu atd.

B) ***Pohyb kyvadla.*** Zevní síla X jest úměrna distanci a od rovnovážné polohy $x=0$; položme tedy $X=-\alpha^2 a$ pak $\frac{da}{dt}=U$.

Derivací rovnice (24) dle t máme, kladouce $H_{(R)}=-\frac{U}{2}$,

$$\left(m+\frac{m'}{2}\right)\frac{d^2H}{dt^2}=-\alpha^2H+2\pi R^2k\left[4\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)+r\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)\right] \quad (30^a)$$

Dosaďme do (30^a) za $r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+4\frac{\partial H}{\partial r}$ hodnotu jeho vzatou z (25^a). Tím obdržíme:

$$(\text{pro } r=R)\ (m-m')\frac{d^2H}{dt^2}=-\alpha^2H-2\pi\frac{dB_0}{dt} \quad (31)$$

Rovnici (18^a) lze též zjednodušiti. Provedením naznačené derivace máme:

$$\lambda r^2\frac{\partial H}{\partial r}=k\left[r^2\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+2r\frac{\partial H}{\partial r}\right]=kr\left[r\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+4\frac{\partial H}{\partial r}-2\frac{\partial H}{\partial r}\right]$$

neb s použitím rovnice (25^a)

$$\text{pro } r=R \qquad (2k+\lambda r)\frac{\partial H}{\partial r}=\varrho r\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{B_0}{r^2} \quad (\text{XVIII})$$

Po uplynutí delší doby od uvedení kyvadla v pohyb stane se tento periodicko utlumeným, tedy vyjádřitelným časovými exponenciellami. Položme v (26) za časový úkon B_0 pohodlněji $-\varrho\frac{\partial B_1}{\partial t}$. Tím obdržíme:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Omega+B_1)-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\Omega+B_1)=\frac{\varrho}{k}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega+B_1).$$

Substituce $\Omega+B_1=e^{\gamma t}S$ vede ku rovnici

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\varrho}{k}\gamma S,$$

jíž lze vyhověti, položíme-li

$$S=(f+gr)e^{hr},\ \text{kdež } hf+g=0,\ h^2=\frac{\varrho\gamma}{k}.$$

Odtud

$$\Omega+B_1=r^3H+B_1=fe^{\gamma t+hr}(1-hr) \quad (31^a)$$

Rovnicím povrchovým (18^a) (neb XVIII) a (31) vyhovíme nezávisle na t, když za B_1 položíme $Ge^{\gamma t}$. Za tím účelem vypočteme z (31^a) hodnoty $\frac{\partial H}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}$, a dosadíme do (XVIII), (31).

Z obou takto vzniklých rovnic eliminujíce konstanty f a G přijdeme ku konečnému vztahu:

$$\left(m + \frac{m'}{2}\right)\gamma^2 + \alpha^2 = \frac{6\,(hR - 1)\,(\lambda R + 2k)\,\pi\,.\,R}{\lambda R + k\,(3 - hR)}\,\gamma k \qquad (32)$$

Dosadíme-li sem $h^2 = \varrho\,\frac{\gamma}{k}$, můžeme vypočítati γ, pomocí jeho najdeme h, pak ze substitučních rovnic poměr f/G, a tím až na neurčitý faktor veličinu H a pomocí její dle (18) rozdělení rychlostí v tekutině.

Bližší postup při provedení naznačeného počtu jest tento. Píšeme-li zkrátka $\omega = hR$, obdržíme z (31), potažmo XVIII substitucemi $B_0 = -\varrho\,\frac{dB_1}{dt} = -\varrho\gamma G e^{\gamma t}$ a $H = \frac{f e^{\gamma t + hr}(1 - hr) - G e^{\gamma t}}{r^3}$ zmíněné rovnice substituční:

$$f e^{\omega}(1 - \omega)\,[\gamma^2(m - m') + \alpha^2] = G\left(\alpha^2 + \gamma^2\left(m + \frac{m'}{2}\right)\right)$$

$$3G\,(2k + \lambda R) = f e^{\omega}\,[\varrho\gamma R^2(1 - \omega) + (2k + \lambda R)\,(3 - 3\omega + \omega^2)]$$

Násobením obou obdržíme eliminační rovnici. V této pišme

$$\gamma^2\,(m - m') + \alpha^2 = \gamma^2\left(m + \frac{m'}{2}\right) + \alpha^2 - \frac{3m'}{2},\ \text{kdež}\ \frac{3m'}{2} = 2R^3\pi\varrho,$$

a řešme rovnici dle $\gamma^2\left(m + \frac{m'}{2}\right) + \alpha^2$. V jmenovateli nastalého výrazu pišme konečně $\omega^2 = h^2R^2 = \frac{\gamma\varrho}{k}\,R^2$ a upravme jej. Tím přijdeme k rovnici (32). V případech praktických, kdy nejde o koule velmi malé, jest logarithmický dekrement pohybu β skrz celkem malý vliv viskosity nepatrný. Ve výrazu

$$\gamma = \nu\sqrt{-1} - \beta,$$

jenž odpovídá periodickému a tlumenému pohybu koule dle vzorce $U = U_0 e^{-\beta t}\cos(\nu t + \nu')$, bude pak zajisté $\nu = 2\pi / T$ (kdež T dobu kyvu označuje) málo rozdílné od hodnoty $\nu_0 = 2\pi / T_0$, která jest v platnosti při scházející viskositě.

Jelikož pravá strana rovnice (32) skrz v ní se vyskytující a dle předpokladu nepatrný faktor k jen korrekčním členem jest, bude dovoleno, tamtéž místo $h = \sqrt{\frac{\varrho\gamma}{k}}$ a γ položiti hodnoty h_0 a γ_0 odpovídající neexistující viskositě. Patrně jest $\gamma = \nu_0 i$ a $h_0 = \sqrt{\frac{\varrho}{k}\nu_0 i}$. Odmocnina má dvojí znamení, (jak i při všeobecnějším výrazu $h = \sqrt{\frac{\varrho}{k}(\nu i - \beta)}$).

Podržeti lze však jen ono, při kterém reálná část jest zápornou, aby se H, které obsahuje člen ku e^{hr} úměrný, tudíž i u v nekonečnu ($r = \infty$) nestalo nekonečně velikým. Klademe tedy $h_0 = -(1+i)\sqrt{\frac{\varrho\nu_0}{2k}}$. Při konečném R a malém k bude $h_0 R$ číslem nad míru velikým, i proti 1, a následkem toho lze za pravou stranu rovnice (32) položiti

$$6\pi R(\lambda R + 2k)\,.\,\nu_0 i\,.\,\frac{1}{\frac{\lambda}{h_0 k} - 1} = p + qi.$$

Zaveďme zkratku

$$\vartheta_0 = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{k\varrho\nu_0}}.$$

Tím bude

$$p = \frac{6\pi R(\lambda R + 2k)\nu_0}{(1+\vartheta_0)^2 + \vartheta_0^2}\vartheta_0;\quad q = -\frac{6\pi R(\lambda R + 2k)\nu_0}{(1+\vartheta_0)^2 + \vartheta_0^2}(1+\vartheta_0).$$

Rovnice (32) nabude pak tvaru

$$\left(m + \frac{m'}{2}\right)\gamma^2 + \alpha^2 = p + qi.$$

Uvážíme-li vztah $\left(m + \frac{m'}{2}\right)\nu_0^2 = \alpha^2$,

máme $\gamma\sqrt{m + \frac{m'}{2}} = \sqrt{-\alpha^2 + p + qi} = i\sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{p+qi}{\alpha^2}\right)^{1/2}$

a protože $p + qi$ jest nadmíru malým a α konečným,

$$\nu\sqrt{-1} - \beta = \gamma = i\nu_0\left(1 - \frac{p+qi}{2\nu_0^2\left(m + \frac{m'}{2}\right)}\right),$$

tedy $\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{p}{2\nu_0^2\left(m + \frac{m'}{2}\right)}\right), \quad -\beta = \frac{\nu_0 q}{2\nu_0^2\left(m + \frac{m'}{2}\right)}$

neb
$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu_0}{\nu} &= \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{3\pi R(\lambda R + 2k)}{\nu_0\left(m + \frac{m'}{2}\right)} \cdot \frac{\vartheta_0}{(1 + \vartheta_0)^2 + \vartheta_0^2} \\ \beta &= \frac{3\pi R(\lambda R + 2k)}{\left(m + \frac{m'}{2}\right)} \frac{1 + \vartheta_0}{(1 + \vartheta_0)^2 + \vartheta_0^2} \end{aligned}\right\} \quad (32^a)$$

Při absolutní hladkosti koule, $\lambda = 0$, jest

$$\vartheta_0 = 0, \quad T = T_0, \quad \beta = \frac{6\pi Rk}{m + \frac{m'}{2}};$$

při úplné adhaesi ($\lambda = \infty$) jest $\vartheta_0 = \infty$,

$$\frac{(\lambda R + 2k)(1 + \vartheta_0)}{(1 + \vartheta_0)^2 + \vartheta_0^2} = \frac{\lambda R}{2\vartheta_0} = R\sqrt{\frac{k\varrho\nu_0}{2}},$$

tedy
$$\beta = \frac{3\pi R^2}{m + \frac{m'}{2}}\sqrt{\frac{k\varrho\pi}{T_0}}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{3\pi R^2}{m + \frac{m'}{2}}\sqrt{\frac{k\varrho\pi}{T_0}} \quad (32^b)$$

§ 78. ***Torsionálné pohyby koule.*** Na nekonečně tenkém tvrdovaném vlákně, které volíme osou z, visí v klidné tekutině koule; pustíme-li ji, uvede jednotlivé vrstvy tekutiny v rotační pohyb kol osy z. O těchto lze předpokládati, že mají tvar koncentrických koulí a že každá z nich se točí jako *tuhé* těleso s obloukovou rychlostí $\psi = f(r, t)$, kdež $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ značí vzdálenost od středu kulového, do nějž počátek souřadnic položen byl. Předpoklad ten jest oprávněn, je-li rychlost pohybu tak malá, že vliv odstředivé síly, která by jinak kulové vrstvy splošťovala, na váhu nepadá. Supponujeme tudíž vše-

obecně: $\quad u = -\psi y, \; v = \psi x, \; w = 0.$

Dosadíme-li: $\quad \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}, \quad W = F(r, t),$

máme: $$u = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0 \quad (33)$$

Rovnice kontinuity jest tím splněna. Síly zevní ať na tekutinu neúčinkují, pohyby buďtež malé. Z třetí rovnice hydrod. (6) a z podmínky $w=0$ plyne $\frac{\partial p}{\partial z}=0$. Z prvých dvou rovnic (6) jde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial W}{\partial t} - k\,\Delta\,W\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{\partial W}{\partial t} - k\,\Delta\,W\right) &= \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \tag{34}$$

Odtud: $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0 \text{ neb } \frac{\partial^2 p}{\partial r'^2}+\frac{1}{r'}\frac{\partial p}{\partial r'}=0,$$

kdež $r'^2=x^2+y^2$, protože tlak, nezávislý jsa na z, může záviseti skrz symmetrii kolem osy z jen od r', tak že jest $p=f(r', t)$. Integrálem jest $p=A \log r' + B$, kdež A, B jsou ještě úkony časové. A musí býti nullou, poněvadž by se jinak p stalo nekonečně velikým na ose $z=0$; B, zároveň tlak v nekonečnu, budiž nullou. Jest tedy tlak vůbec nullou.

Máme tudíž, integrujíce rovnice (34)

$$\varrho\frac{\partial W}{\partial t} - k\Delta W = f(z,\ t) \tag{34a}$$

Integrační úkon $f(z, t)$ lze bez újmy všeobecnosti také položiti nullou. Integrálem této rovnice jest totiž:

$$W = W_1 + W_2,\quad W_1 = W_1(r,\ t),\quad W_2 = W_2(z,\ t),$$

kdež: $$\varrho\frac{\partial W_1}{\partial t} = k\Delta W_1,\quad \varrho\frac{\partial W_2}{\partial t} - k\frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} = f(z,\ t).$$

Při tvoření hodnot u, v, (33) W_2 vypadne, tak že máme vynechávajíce je jakožto bezvýznamné, $W=W_1$, čili místo (34a)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{k}{\varrho}\,\Delta W,$$

neb $$\frac{\partial}{\partial t}(Wr) = \frac{k}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(Wr), \tag{35}$$

protože W závisí jen na r, t. Vyšetřeme podmínky hraničné.

Na povrchu koule ($r=R$) mysleme si jako dříve v rovině $y=0$ a v poloze $\cos nx = \frac{x}{r}$, $\cos n\,y = 0$, $\cos nz = \frac{z}{r}$ velmi

tenkou vrstvu $d\omega$. Na jednotku plochy její od středu koule odvrácené účinkuje ve směru pohybu, jenž jest rovnoběžným k ose y-ové, viskota tekutiny silou:

$$Y_n = Y_x \cos nx + Y_z \cos nz = k\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{x}{r} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{z}{r}\right]$$

$$= \frac{k}{r}\left[x\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right] = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) x\,(x^2 + z^2),$$

neb skrz $x^2 + z^2 = r^2$ a $y = 0$

$$Y_n = kx\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \,..\, (r = R) \qquad (35^a)$$

Je-li Ψ oblouková rychlost koule, jest účinek zevnějšího tření na vrstvu rovněž ve směru osy y-ové:

$$S = (\Psi . x - v)\,\lambda = x . \lambda\left(\Psi - \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

a dle věty odvozené na str. (264) $S + Y_n = 0$, tedy:

$$\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{k}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \ldots (\text{pro } r = R).$$

Ze vztahu:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) = \left(-3\frac{\partial W}{\partial r} + 2\frac{\partial W}{\partial r} + r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$= -3\frac{\partial W}{\partial r}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (Wr)}{\partial r^2}$$

a z rovnice (35) jde tedy

$$\Psi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\left(1 + \frac{3k}{r\lambda}\right) - \frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial t}\right), \; (r = R) \qquad (36)$$

Tekutinu představme si k vůli všeobecnosti ještě omezenu *druhou* zevnější koncentrickou plochou kulovou o poloměru R', která má angulárnou rychlost Ψ'. Je-li zde λ' koefficientem zevnějšího tření, bude vrstva na R' lpící a v rovině $y = 0$ obsažená ve směru osy y-ové na jednotce plochy podléhati účinku zevnějšího tření, který se rovná jako dříve obnosu

$$S = (\Psi' x - v)\,\lambda' = x\lambda'\left(\Psi' - \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right).$$

Na straně přivrácené k tekutině podléhá síle viskosní od

tekutiny $Y_n = Y_x \cos nx + Y_z \cos nz$, kdež n značí normálu do tekutiny čelící, tak že jest $\cos nx = -\frac{x}{R'}$, $\cos nz = -\frac{z}{R'}$. Podobným postupem jako dříve nalezneme $Y_n = -kx \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)$ a z podmínky $Y_n + S = 0$ pro $(r = R')$

$$\Psi' = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\left(1 - \frac{3k}{R'\lambda'}\right) + \frac{\varrho}{\lambda'}\frac{\partial W}{\partial t}\right) \tag{36a}$$

Je-li zevní koule R' v klidu, tedy $\Psi' = 0$, máme jednodušeji pro $(r = R')$

$$\frac{\partial W}{\partial r}\varepsilon + \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \tag{37}$$

kdež

$$\varepsilon = \frac{R'\lambda' - 3k}{\varrho R'} \tag{38}$$

Druhou serii povrchových podmínek dávají nám pohybové rovnice obou koulí.

Element kulového pasu $d\omega$ v rovině $y = 0$ na vnitřní kouli R dává dle (35^b) k statickému momentu M, jímž viskosita kouli R kol osy z točiti hledí, příspěvek:

$$d\omega\, Y_n x = d\omega\, k\,.\, R^2 \sin^2\vartheta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

kdež $\sin\vartheta = \frac{x}{R}$. Celý pás, jehož plochou jest $2R^2\pi\, d\vartheta \sin\vartheta$, dává moment:

$$2R^4\pi\, d\vartheta \sin^3\vartheta\, k \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right).$$

Integrací od $\vartheta = 0$ do $\vartheta = \pi$ obdržíme moment od celé koule:

$$M = \frac{8\pi R^4 k}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{8\pi R^4 k}{3}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\varrho}{k}\frac{\partial W}{\partial t} - 3\frac{\partial W}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}\right) \text{ pro } (r = R) \tag{38a}$$

Při transformaci rovnice (38^a) použito rovnice (35).

Je-li K moment setrvačnosti koule R, χ úhlová deviace od

polohy netordovaného vlákna, tedy $\frac{d\chi}{dt} = \Psi$, pak $-\alpha^2\chi$ statický moment torse, bude

$$K\frac{d\Psi}{dt} = -\alpha^2\chi + M.$$

Differencujme dle t a dosaďme za Ψ hodnotu z (36) a obdržíme

$$\left(K\frac{d^2}{dt^2} + \alpha^2\right)\left[\frac{\partial W}{\partial r}\left(1 + \frac{3k}{\lambda R}\right) - \frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial t}\right]$$
$$= \frac{8\pi R^4 k}{3}\left(\frac{\varrho}{k}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{3}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}\right), \qquad (39)$$

kdež v (39) za r položiti jest R.

Je-li i zevnější koule, jejíž setrvačný moment jest K', na vlákně zavěšená, jehož torsijní moment jest $-\alpha^2\chi'$, kdež χ' jest derivací z polohy rovnovážné, obdržíme podobnou rovnicí. Jako dříve nalezneme výraz pro M', statický moment pocházející od viskosity, který jest roven

$$M' = -\frac{8\pi R'^4 k}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \text{ pro } r = R',$$

protože *cos nx*, *cos ny* směrové *cosiny* normály do vnitř čelící a ve výrazu $Y_n = Y_x \cos nx + Y_z \cos nz$ se vyskytující jsou $-\frac{x}{R'}, -\frac{z}{R'}$. Podobnou transformací a s použitím rovnice (36[a]) najdeme pro $r = R'$

$$\left(K'\frac{d^2}{dt^2} + \alpha'^2\right)\left[\frac{\partial W}{\partial r}\left(1 - \frac{3k}{\lambda' R'}\right) + \frac{\varrho}{\lambda'}\frac{\partial W}{\partial t}\right]$$
$$= -\frac{8\pi k R'^4}{3}\left(\frac{\varrho}{k}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{3}{R'}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}\right) \qquad (39^A)$$

A) Zabývejme se napřed případem, kdy zevní koule stojí. Pohyb koule vnitřní jest periodický a tlumený. Kladouce jako dříve $\gamma = \nu i - \beta$ vyhovíme rovnici (35) integrálem

$$Wr = e^{\gamma t} e^{hr}, \quad \text{kdež } h^2 = \gamma\frac{\varrho}{k}.$$

Úplným integrálem jest

$$Wr = e^{\gamma t}\left(G_1 e^{h_1 r} + G_2 e^{h_2 r}\right). \qquad (39')$$

kdež h_1 a h_2 jsou kořeny rovnice $h^2 = \frac{\gamma\varrho}{k}$ a G_1 a G_2 konstanty. Substituce do povrchové podmínky (37) dává

$$0 = G_1 e^{h_1 R'} (\gamma R' + \varepsilon R' h_1 - \varepsilon) + G_2 e^{h_2 R'} (\gamma R' + \varepsilon R' h_2 - \varepsilon) \quad (39^a)$$

Substituce z (39′) vede ku:

$$\left[(K\gamma^2 + \alpha^2)\left(1 + \frac{3k}{\lambda R}\right) + 8\pi k R^3 \gamma\right]\left(\frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{1}{W}\right)_{(r=R)} = \frac{8\pi R^4 \gamma^2 \varrho}{3} + \frac{(K\gamma^2 + \alpha^2)\gamma\varrho}{\lambda} \quad (40)$$

Výraz $\left(\frac{1}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{1}{R} \frac{(h_1 R - 1) G_1 e^{h_1 R} + (h_2 R - 1) G_2 e^{h_2 R}}{G_1 e^{h_1 R} + G_2 e^{h_2 R}}$

se redukuje pomocí (39ᵃ) a substituce $h_2 - h_1 = 2p_0$ na

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{1}{W} \cdot\right)_{r=R} = \frac{(h_1 R - 1)}{R} \frac{1 - \frac{h_2 R - 1}{h_1 R - 1} \frac{\gamma R' + \varepsilon(h_1 R' - 1)}{\gamma R' + \varepsilon(h_2 R' - 1)} e^{-2p_0(R'-R)}}{1 - \frac{\gamma R' + \varepsilon(h_1 R' - 1)}{\gamma R' + \varepsilon(h_2 R' - 1)} e^{-2p_0(R'-R)}} \quad (41)$$

Z rovnic (40) a (41) a (39) lze eliminovati G_1 a G_2, po substituci $h^2 = \frac{\varrho\gamma}{k}$ najíti $\gamma = \nu i - \beta$, pak h, pak G_1 / G_2, pak až na multiplikativnou konstantu W v (39′).

Podotkněme, že reálnou část v $p_0 = \frac{h_2 - h_1}{2}$ lze voliti podstatně kladnou; neboť píšíce $h_2 = p + qi$, $h_1 = -(p + qi)$, potřebujeme jen za h_2 onen kořen považovati, jehož reálná část jest kladná. Následkem toho jest reálná část v h_1 podstatně zápornou. K určení p, q slouží rovnice

$$p^2 - q^2 = -\frac{\varrho\beta}{k}, \; 2pq = \frac{\varrho\nu}{k}.$$

Poznamenejme: $\nu = \frac{2\pi}{T}$ jest kladné, p též dle ustanovení, tedy musí i q býti kladným, dále jest $p_0 = h_2$.

Nalezené vzorce lze specialisacemi přehledněji interpretovati; zejména předpokládejme nadmíru malou viskositu (k malé).

B) Jelikož p, q a též h_1, h_2 jsou úměrny ku $\frac{1}{\sqrt{k}}$, bude při

konečných R, R'... $h_1 R$, $h_1 R'$, $h_2 R$, $h_2 R'$ velmi značným číslem, tak že se rovnice (41) podstatně zjednoduší. Je-li $R' - R$ veličinou téhož řádu jako R', to jest konečné, bude dovoleno položiti $e^{-2p_0(R'-R)} = 0$, protože reálná část v p_0 jest kladná ($2p_0 = h_2 - h_1$), a věci se mají tak, jako by R' bylo nekonečným. Tím bude

$$\Big/ \frac{\partial W}{\partial r}_{(r=R)} \cdot \frac{1}{W} = h_1 = \sqrt{\frac{\varrho\gamma}{k}}.$$

Dosazení do (40) vede pak přímo k rovnici pro γ, totiž ku:

$$(K\gamma^2 + \alpha^2)\left(1 + \frac{3k}{R\lambda} - \frac{1}{\lambda}\sqrt{k\gamma\varrho}\right) = \frac{8\pi R^4}{3}\gamma\left(\sqrt{k\gamma\varrho} - \frac{3k}{R}\right) \quad (41^\alpha)$$

Při malých k lze k vedle $\sqrt{k}$ vynechati. Vylučujíce absolutní hladkost koule ($\lambda = 0$) považujeme λ aspoň za konečné a následkem toho $1 - \frac{\sqrt{k\gamma\varrho}}{\lambda}$ za málo rozdílné od jednice. Dělíce tímto členem obě strany rovnice obdržíme:

$$\left(K - \frac{8\pi R^4}{3}\frac{k\varrho}{\lambda}\right)\gamma^2 + \alpha^2 = \frac{8\pi R^4}{3}\gamma\sqrt{\gamma k\varrho} \qquad (41^a)$$

Dle ustanovení jest reálná část kořene $h_1 = \sqrt{\frac{\varrho\gamma}{k}}$ podstatně zápornou, a totéž platí o odmocnině $\sqrt{\gamma k\varrho} = \sqrt{k\varrho}\sqrt{\nu i - \beta}$. Až na veličiny vyššího řádu lze ji při malých k nahraditi výrazem $\sqrt{k\varrho}\sqrt{\nu_0 i} = -\sqrt{\frac{\nu_0}{2}}(1+i)\sqrt{k\varrho}$, kdež $\nu = \nu_0$ náleží nepřítomnosti viskosity. Rovnice (41ª) stane se pak kvadratickou. Položme v ní $\gamma = \nu i - \beta$, pak až na veličiny vyššího řádu $\gamma^2 = -\nu^2 - 2\nu\beta i$ a oddělme reálné od imaginárného. Tím bude se zřetelem na $\nu_0^2 K = \alpha^2$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{4\pi R^4}{3}\sqrt{\frac{k\varrho\pi}{T_0}} \cdot \frac{1}{K - \frac{8\pi R^4}{3}\varrho\frac{k}{\lambda}} \\ \frac{\nu^2}{\nu_0^2} &= \frac{T_0^2}{T^2} = \frac{K - \frac{8\pi R^4}{3}\sqrt{\frac{k\varrho}{2\nu_0}}}{K - \frac{8\pi R^4\varrho k}{3\lambda}} \end{aligned}\right\} \qquad (41^b).$$

Při úplné adhaesi ($\lambda = \infty$) máme jednodušeji:

$$\beta = \frac{4\pi R^4}{3} \cdot \frac{1}{K} \sqrt{\frac{k\varrho\pi}{T_0}},$$

a po malé proměně:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{2\pi R^4}{3K} \sqrt{\frac{k\varrho T_0}{\pi}}.$$

C) Předpokládejme, že tlouštka vrstvy $R' - R$ jest nepatrna proti R, a úplnou adhaesi $\lambda = \lambda' = \infty$; pak jest dle (38) též $\varepsilon = \infty$, dle vztahu (41), v němž *1* vedle hR zanedbáme,

$$\frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{1}{W}\Big/_{r=R} = \frac{h_1 (1 - e^{-2p_0(R'-R)})}{1 - \frac{h_1}{h_2} e^{-2p_0(R'-R)}} = \frac{2h_1 h_2 p_0 (R'-R)}{h_2 - h_1} = -\frac{\varrho\gamma}{k}(R'-R).$$

(Neboť $h_1 h_2 = -h_1^2 = -\frac{\varrho\gamma}{k}$ a $h_2 - h_1 = 2p_0$.)

Pomocí (40) obdržíme se zřetelem k tomu, že jest $R' - R$ malé proti R,

$$\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{K} + 2c\gamma = 0, \quad \text{kdež} \quad c = \frac{4\pi k R^4}{3K(R' - R)}.$$

Jedno γ jest nekonečně malé, druhé jest $-2c$, pohyb jest tudíž aperiodický se značným logarithmickým dekrementem $\beta = 2c$. (Útlumy vzduchové.)

D) *Helmoltz* a *Piotrowski* studovali útlum pohybu, visí-li na vlákně dutá koule o radiu R' vyplněná tekutinou, jejížto konstanta vniterního tření se vyšetřiti má. Kdyby tekutina ztuhla a tvořila s koulí jeden celek, závisel by logarithmický dekrement útlumu jen na viskositě vlákna. Odtud jde, že se při tekutém obsahu koule dekrement zvětší, poněvadž se tekutina proměnlivým pohybům obalu ustavičně akkomodovati hledí, arciť se ztrátou živé síly.

Předpokládejme něco všeobecněji, že se uvnitř nalézá koncentrická tuhá koule R v klidu. Z (36) obdržíme kladouce $\Psi = 0$: pro ($r = R$)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \varepsilon' \frac{\partial W}{\partial r} = 0, \quad \text{kdež} \quad \varepsilon' = -\frac{3k + R\lambda}{\varrho R}.$$

Pro $r = R'$ musí býti splněna podmínka (39*A*), integrálem rovnice (35) jest opět výraz (39'). Postup počtu jest podobný.

Neexistuje-li vnitřní koule, odpadne podmínka (36), ale protože u tudíž i W pro $r=0$ nemůže býti nekonečně velikým, musí se v rovnici (39') položiti $G_1 = - G_2$,

tedy $$W = \frac{G_1 e^{\gamma t}(e^{h_1 r} - e^{h_2 r})}{r}, \text{ kdež } h^2 = \frac{\gamma\varrho}{k}.$$

Odtud jde

$$\frac{1}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial r}\Big/_{r=R'} = \frac{1}{R'} \cdot \frac{e^{h_1 R'}(h_1 R' - 1) - e^{h_2 R'}(h_2 R' - 1)}{e^{h_1 R'} - e^{h_2 R'}}.$$

Ustanovme jako dříve, že k jest malé, R' konečné, tedy $R'h_1$ i $R'h_2$ velmi značné proti 1 a volme za h_2 onen kořen rovnice $h^2 = \frac{\gamma\varrho}{k}$, který má reálnou část kladnou, za h_1 kořen s reálnou částí zápornou. Tím bude

$$\frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{1}{W}\Big/_{r=R'} = h_2 = - h_1 = - \sqrt{\frac{\varrho\gamma}{k}}.$$

Substituce do (39^A) dává

$$(K'\gamma'^2 + \alpha'^2)\left(1 - \frac{3k}{\lambda' R'} - \frac{1}{\lambda'}\sqrt{\varrho\gamma k}\right) = \frac{8\pi R'^4 \gamma}{3}\left(\sqrt{k\gamma\varrho} + \frac{3}{R'} k\right).$$

Tato rovnice obdrží se z (41^α), položíme-li za γ, α, λ, R, K hodnoty γ', α', λ', $- R'$ K'. Výsledek (41^b) platí následkem toho i v našem případě, jen že R v něm značí radius koule duté.

Dodatky a opravy.

(Číslice tučné jsou stránky; k malým číslicím označujícím řádky jest připojeno „d“, čítány-li jsou sdola.)

44 $_{5d}$, v druhém int. na pravo připojiti $d\omega$.

47 $_{14d}$, mezi $+\frac{\partial K}{\partial \alpha}$ a $+\frac{\partial K}{\partial \beta}$ patří čárka. **51** $_4$, Ω_i místo Ω.

53 Přísnější důkaz rovnice (17) jest tento: z rovnice na 4. ř. d. jde:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = S\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right), \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma} = S\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sigma\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right);$$

odtud $dU = Sd\left(\sigma\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)$ a integrací $U = F\left(\sigma\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)$. Na proudokřivce jest U, tudíž i $\sigma\frac{\partial W}{\partial \sigma}$ stálé.

63 $_{1d}$, $\frac{\varrho}{2}$ místo $\frac{1}{2\varrho}$. **65** $_{7d}$, připoj δz.

68 $_{17}$, $-\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}V^2 + \ldots$ místo $\frac{p}{\varrho} = -\frac{1}{2}V^2 + \ldots$

71 $_{7d}$, závorku $\}$ na pravé straně vynechati.

75 $_{2d}$, přip. v int. $d\omega$.

80 rovn. 36[1], $\overline{M}_z$ místo M_z; $_{8d}$ „v konečnu“ (místo v nekonečnu).

85 § 34. V obrazci (4) má na ose v pravo běžící státi x' (místo x).

88 $_6$, $\dot{\lambda}_1\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}$ místo $\lambda_1\frac{\partial \overline{T}}{\partial u}$.

90 $_{10}$, $\Sigma(Z'y' - Y'z')$ místo $\Sigma(Z'y' - Yz)$.

91 $_{13}$, X'' atd. jsou imp. síly na jednotl. bodech.

94 $_3$, v^2 místo v.

99 $_{3,\ 3d,\ 4d}$, všude ω místo χ a $\dot{\omega}$ místo $\dot{\chi}$;

$_5$, za čárkou připojiti: „současně jest $\omega = \frac{Rrt}{P\cos\vartheta} + const'$“;

$_{2d}$, rovnice má zníti $\frac{w\sin\vartheta}{\dot{\omega}} = \frac{Pw\sin\vartheta\cos\vartheta}{Rr}$.

100 $_{14}$, „kružnici“ místo „přímku“.

112 $_{10}$, $d\omega_1$ místo $d\omega$. **115** $_{12d}$, $j + j' + 1$ místo $j + j'$.

117 $_{1d}$, d^2q_n místo dq_n^2. **124** $_{10}$, g místo g_1.

135 $_{11d}$, r' místo r.

139 $_3$, všude φ_1 místo φ; $_{11}$, za (59) přip. „na“

140$_{1d}$, $1+\frac{3x}{d}$ místo $+1\frac{3x}{d}$.

142$_{13}$, uzáv. výraz za $\frac{\partial}{\partial u}$ umocniti na třetí; $_{17}$, $\overline{C}$ (místo C).

143$_{9d}$, za $=$ připoj faktor MM'; posl. ř., místo jednoho ε patří ε'.

144$_{3}$, $\dot{a}$ místo a. **153**$_{1}$, čti „arcif při lomených a".

159$_{13d}$, „srpu" (místo pruhu). **160**$_{2}$, $-\beta i$ $\left(\text{místo } -\frac{\beta i}{2}\right)$.

167$_{3}$, v obrazci (12) má místo ξ', η', ζ' státi $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$; $_{15}$, čti „essenciálně".

169$_{9}$, v jmenovateli $+$ (místo $-$); $_{2d}$, C (místo *const*).

171$_{18}$, $\dot{\psi}$ místo ψ_0. **187**$_{10d}$, r (místo r'); $_{8d}$, za $=$ připoj faktor $\frac{1}{2\pi}$.

198$_{13}$, c_1 místo 0. **208**$_{6}$, $\frac{3}{2}$ (místo $\frac{2}{2}$).

228$_{2d}$, $e^{m(z+h)} - e^{-m(z+h)}$ místo $e^{m(z-h)} + e^{-m(z+h)}$.

229$_{3}$, místo „prvém" čti „postupných vln"; $_{16}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ místo φ.

232$_{8}$, $\frac{1}{m_1}$ $\left(\text{místo } \frac{1}{m_1^2}\right)$; v integr. na 1$d$ přip. $d\xi$.

234$_{7}$, $\frac{1}{m_1^2}$ místo $\frac{1}{m_1^3}$; 13, $\frac{1}{m_1}$ místo $\frac{1}{m_1^2}$. Integr. na 6. ř. transformuje se substitucí $m = m_1\eta$ snadno na formu integr. v (10), z nichž konkluse vyvozena byla; $m_1\beta$ jest totiž veličinou nekonečnou.

240$_{5d}$, $\cos\omega^2$ místo $\cos^2\omega$. **241**$_{5}$, ζ' místo ξ'.

246$_{6}$, „na" místo „mu". **247**$_{3d}$, za „sice" připojiti A_{ki}; $_{4d}$, r_2 místo r^2.

248$_{6d}$. Rovnice (45), jakož i důkaz její zůstává v platnosti i tehdy, neredukuje-li se $R_{ki}(r)$ na *jeden* z part. integrálů. Dle vývodů na str. 246. skládá se řečený výraz ze dvou partikulárných integrálů, které jsou úkony argumentu $m_{ki}r$, při čemž jeden z nich jest násoben poměrem A/B, který jest úkonem veličiny m_{ki}. Definujme úkon $R_{kj}(r)$ tím, že v R_{ki} položíme místo $m_{ki}r$ $m_{kj}r$, kdež $m_{kj} = m_{ki} + \delta$, ponechávajíce v A/B m_{ki}. Pak splňuje $R_{kj}(r)$ také differenciálnou rovnici 248$_{6}$, a všechny vývody zůstávají v platnosti.

249$_{6d}$, „horní" zaměniti s „dolní" a vice versa.

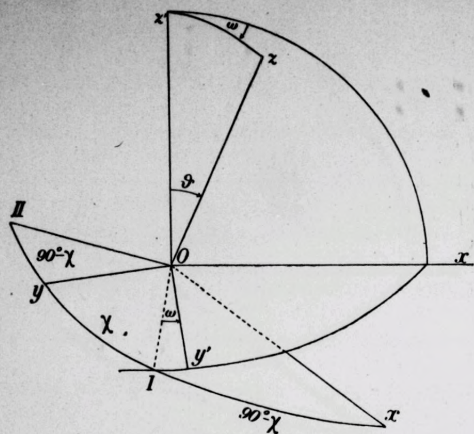
271$_{10}$, mezi u a Ω patří čárka, ne puntík.

278$_{11d}$, v první rovnici piš $-\gamma^2\frac{3m'}{2}$ místo $-\frac{3m'}{2}$.

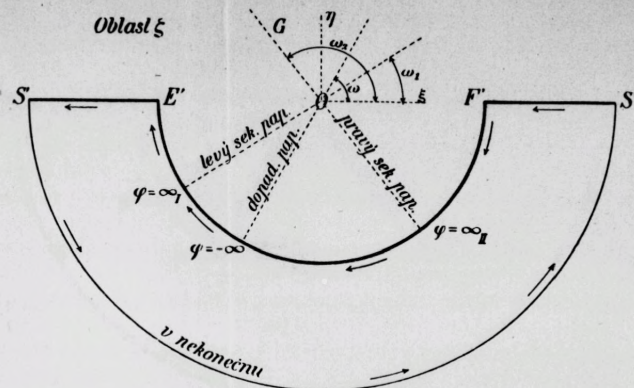
284$_{9}$, $\alpha'^2\chi'$ místo $\alpha^2\chi'$.

285$_{10}$, dele „a (39)" pak „eliminovati G_1 a G_2".

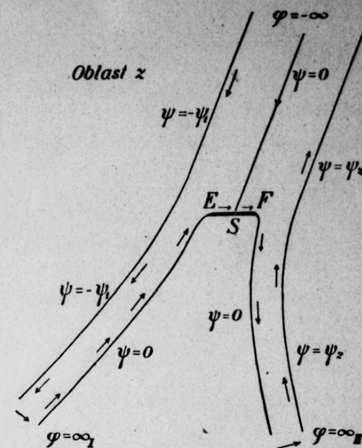
288$_{2d, 4d}$, polož γ místo γ'.



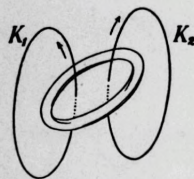
Obr. 4.



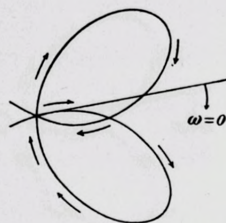
Obr. 15.



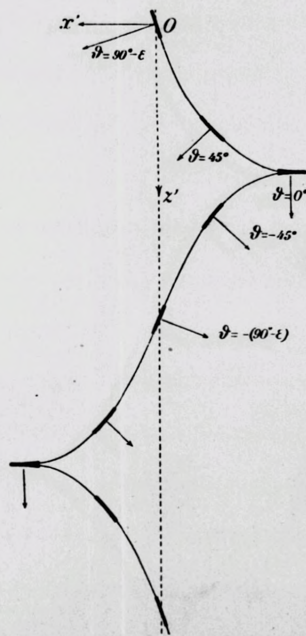
Obr. 14.



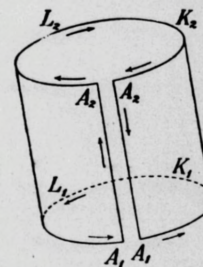
Obr. 1.



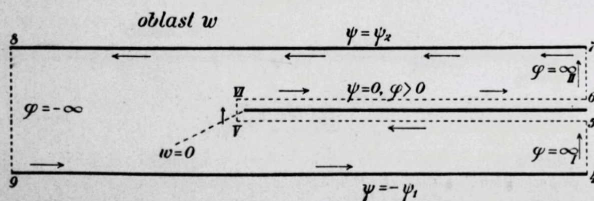
Obr. 5.



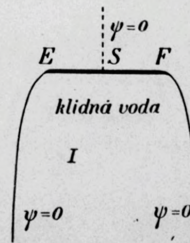
Obr. 6.



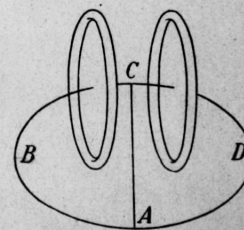
Obr. 2.



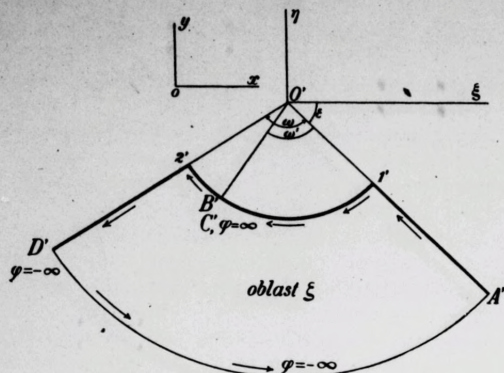
Obr. 16.



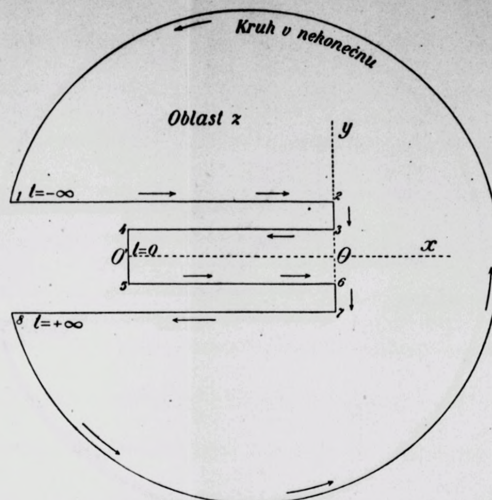
Obr. 17.



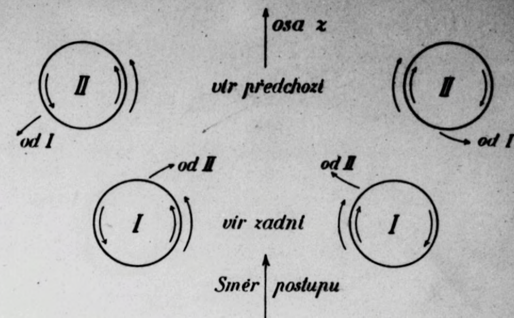
Obr. 3.



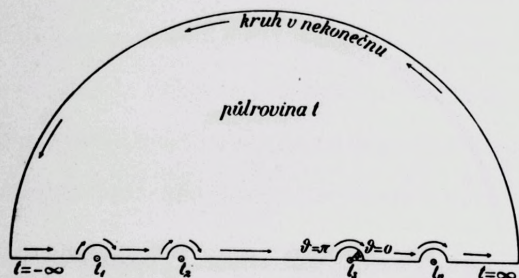
Obr. 11.



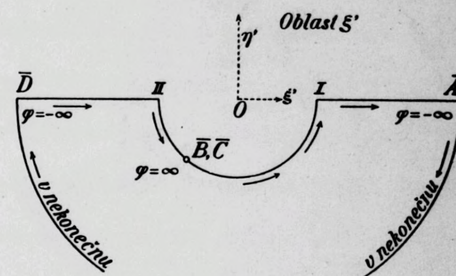
Obr. 9.



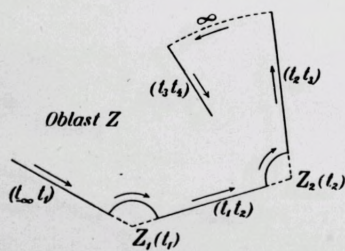
Obr. 18.



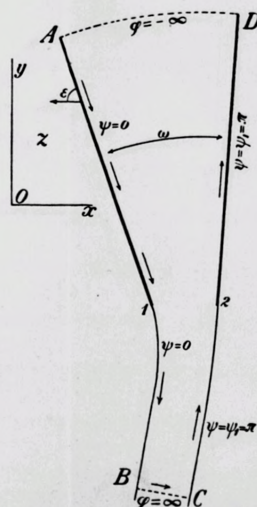
Obr. 7.



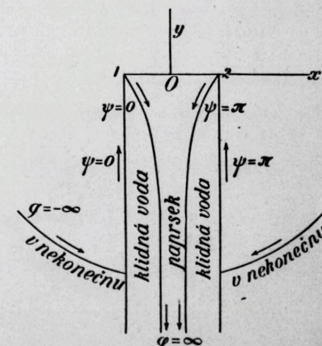
Obr. 12.



Obr. 8.



Obr. 10.



Obr. 13.